Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Wintersemester 2023/2024

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numsde.html

6. Übungsblatt

Ausgabe: 22.01.2024, Abgabe: 29.01.2023, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 6.1 (6 Punkte)

Wiederholen Sie in Matlab/Python die Rechnungen von den Aufgaben 1 und 2, Blatt 5, indem Sie mit der dort vorgestellten Technik die schwache Konvergenzordnung (für die Testfunktion $g = \mathrm{id}$) des Euler-Maruyama- und des Milstein-Verfahrens bestimmen.

Aufgabe 6.2 (6 Punkte)

Gegeben sei die SDGL

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = \bar{S} \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

welche den Preis einer Aktie modelliert. Die Daten seien durch $r = 0.1$, $\sigma = 0.01$, $\bar{S} = 1$ und $T = 1$ gegeben.

a) Zur Überprüfung ob schwache Konvergenz auch ohne genaue Approximation der Pfade erzielt werden kann, betrachten wir für (1) das Verfahren

$$\hat{Y}_{t_{n+1}} = \hat{Y}_{t_n} + r\hat{Y}_{t_n} h + \sigma \hat{Y}_{t_n} \sqrt{h}\xi_n, \qquad \hat{Y}_0 = \bar{S}, \qquad n < N$$

mit $h = T/N$ und unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ξ_n, die

$$P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$$

erfüllen. Dieses Verfahren sollte mit Ordnung 1 schwach konvergieren, sofern die Testfunktionen genügend glatt sind.

1) Führen Sie analog zu Aufgabe 1 in Matlab/Python eine numerische Untersuchung der schwachen Konvergenz durch für die Testfunktionen $g(x) = x$ bzw. $g(x) = x^2$. Wählen Sie dazu 200000 Pfade zur approximativen Erwartungswertbestimmung.

2) Wählen Sie nun die (nur Lipschitz-stetigen) Testfunktionen $g(x) = e^{-rT}(x - K)^+$ bzw. $g(x) = e^{-rT}(K - x)^+$ und überprüfen Sie, ob der Fehler

$$\left| E(g(S_T)) - E(g(\hat{Y}_T)) \right|$$

immer noch die Konvergenzordnung 1 erreicht (wählen Sie $K = 1.105$).

b) Berechnen Sie mit dem Verfahren aus Teil a) für $N = 1000$ eine möglichst gute Näherung für den Wert einer asiatischen Call-Option zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Auszahlungsfunktion

$$V(S_T) = \left(S_T - \frac{1}{T} \int_0^T S_t \, dt \right)^+ .$$

Verwenden Sie hier folgende Daten: $r = 0.04$, $\sigma = 0.25$, $\bar{S} = 100$ und $T = 1$.

Aufgabe 6.3 (6 Punkte)

Seien X eine standard-normalverteilte Zufallsvariable und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie für $\tilde{f}(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ folgende (Un-) Gleichungen:

$$E(\tilde{f}(X)) = E(f(X)) \quad \text{und} \quad V(\tilde{f}(X)) \leq \frac{1}{2} V(f(X)).$$

Hinweis: Zeigen Sie für die Ungleichung zunächst $\operatorname{cov}(f(X), f(-X)) \leq 0$.