Bachelorarbeit

Hermitesche Determinantendarstellungen rein reeller Polynome

vorgelegt von

David Sawall

an der Universität Konstanz

Oktober 2020

Gutachter: Prof. Dr. Markus Schweighofer

Inhaltsverzeichnis

Zuerst ein paar Notationen und Konventionen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- Es seien $n, d \in \mathbb{N}_0$, außer wenn explizit anders gesagt.
- Alle Ringe sind unitär und kommutativ (außer natürlich der Ring der $n \times n$-Matrizen über einem kommutativen Ring mit 1).
- Für $E \subseteq R$ ist (E) das von den Elementen von E erzeugte Ideal, wobei R ein Ring ist.
- I_n ist das neutrale Element (bezüglich $\cdot$) des (nicht-kommutativen) Ringes $R^{n\times n}$ (R Ring).
- Schreibe $\deg(p)$ für den (totalen) Grad eines Polynoms mit Koeffizienten in einem Ring R und $R[X]_d := \{p \in R[X] \mid \deg(p) \leq d\}$ für die Menge aller univariaten Polynome mit Grad kleiner gleich d.
- Für einen Körper K schreibe $K(X) := (K[X] \setminus \{0\})^{-1}K[X]$ für den *Quotientenkörper* von $K[X]$.
- Schreibe $\mathbf{i}$ für eine *imaginäre Einheit*, also eine (komplexe) Nullstelle von $X^2 + 1$.
- Schreibe $\operatorname{Im}(a + \mathbf{i}b) = b$ und $\operatorname{Re}(a + \mathbf{i}b) = a$ für den *Imaginärteil* beziehungsweise den *Realteil* von $a + \mathbf{i}b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
- Notiere mit $(a + \mathbf{i}b)^* = a - \mathbf{i}b$ das *komplex Konjugierte* von $a + \mathbf{i}b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
- Schreibe A^T das Transponierte der Matrix A.
- $SR^{n\times n} := \{A \in R^{n\times n} \mid A = A^T\}$ (R Ring)
- Für $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ schreibe $A^* = (a^*_{i,j})_{(j,i)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
- X, Y und T seien stets Unbekannte.

Einleitung

Wann ist ein Polynom in $\mathbb{R}[X]$ ein charakteristisches Polynom einer symmetrischen Matrix? Die Antwort hierauf ist recht simpel:

Genau dann, wenn es normiert ist und nur reelle Nullstellen besitzt.

Dies sieht man ziemlich einfach, denn eine symmetrische Matrix hat nur reelle Eigenwerte und diese sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Die andere Richtung ist sogar noch einfacher. Betrachtet man ein Polynom

$$p = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_d)$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, dann ist nämlich

$$p = \det\left(XI_d - \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_d \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} X - \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X - \alpha_d \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Eine Darstellung mit einer symmetrischen Matrix ist eine Verallgemeinerung der Darstellung eines Polynoms in Linearfaktoren, denn im Diagonalfall stehen die Faktoren auf der Diagonalen der obigen Matrix ganz rechts in $(*)$.

Analog kann man sich auch die Frage stellen, wann und wie man zu einem Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ eine symmetrische Matrix $A \in S\mathbb{R}^{d \times d}$ finden kann mit

$$p = \det(I_{\deg(p)} + XA).$$

Wann dies geht ist wieder leicht zu beantworten:

Genau dann, wenn $p(0) = 1$ gilt und p nur reelle Nullstellen besitzt.

Wie man diese symmetrische Matrix berechnet wird am Anfang von Kapitel 6 gezeigt. Dass dies genau die Polynome sind, ist eigentlich die Antwort $(*)$, wenn man das reziproke

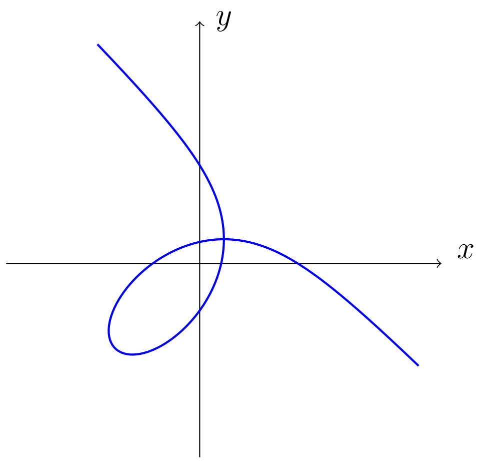
Polynom $X^{\deg(p)}p\left(\frac{1}{X}\right)$ von p betrachtet. Es ist $p \in \mathbb{R}[X]$ genau dann ein Polynom mit nur reellen Nullstellen und $p(0) = 1$, wenn $X^{\deg(p)}p\left(\frac{1}{X}\right) \in \mathbb{R}[X]$ normiert ist und nur reelle Nullstellen besitzt (beachte, dass die Nullstellen von $X^{\deg(p)}p\left(\frac{1}{X}\right)$ genau die Inversen der Nullstellen von p sind). Diese Frage nach der Berechenbarkeit ist natürlich wichtig, da man im Allgemeinen nicht Nullstellen eines Polynom von hinreichend großem Grad (≥ 5) exakt ausrechnen kann, da Polynome von hinreichend großem Grad im Allgemeinen nicht durch Radikale auflösbar sind.

In Kapitel 6 wird dies zum Schluss dann noch auf Polynome in 2 Unbekannten verallgemeinert, was das Hauptergebnis dieser Arbeit sein wird und unter dem Namen *Satz von Helton und Vinnikov* bekannt ist. Dazu muss man aber erstmal Polynome (in einer Unbekannten) mit nur reellen Nullstellen auf Polynome in 2 Unbekannten verallgemeinern. Dies geschieht, indem man einfach fordert, dass das bivariate Polynom entlang jeder reellen Ursprungsgeraden betrachtet nur reelle Nullstellen besitzt.

> Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ heißt also *rein reell*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ das univariate Polynom $p(xT, yT) \in \mathbb{R}[T]$ nur reelle Nullstellen besitzt.

Betrachte im Folgenden die reelle Nullstellenmenge eines Polynoms $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ mit $p(0) = 1$. Das Polynom p ist genau dann rein reell, wenn auf jeder Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^2$ genau $\deg(p)$-viele Nullstellen von p liegen, hierbei muss man Nullstellen im Unendlichen mitzählen und mehrfache Nullstellen der Vielfachheit entsprechend mehrfach zählen.

Betrachte beispielsweise das Polynom $p = (X-1)^3 + (Y-1)^3 + 3(X-1)(Y-1)$, welches als Nullstellenmenge ein kartesisches Blatt besitzt. Das folgende Bild[1] ist die reelle Nullstellenmenge von p.



Wenn man jetzt eine Ursprungsgerade des $\mathbb{R}^2$ betrachtet, welche nicht von $(1, 1)$ oder

[1]Die Grafik wurde vom Autor selbst mit TikZ erstellt.

$(1,-1)$ aufgespannt wird, dann hat diese genau drei Schnittpunkte mit der blauen Nullstellenmenge von p.

Die von $(1,1)$ aufgespannte Ursprungsgerade besitzt nur zwei Schnittpunkte mit der Nullstellenmenge, jedoch ist der Punkt $(1,1)$ eine doppelte Nullstelle und muss dementsprechend doppelt gezählt werden. Also bekommt man auch hier wieder drei Nullstellen.

Die von $(1,-1)$ aufgespannte Ursprungsgerade besitzt auch nur zwei Schnittpunkte mit der Nullstellenmenge, aber hier besitzt p noch eine Nullstelle im Unendlichen, was man am Bild an der Asymptote sieht, die parallel zu der von $(1,-1)$ aufgespannten Ursprungsgeraden verläuft. Alternativ gilt

$$p(T,-T) = (T-1)^3 + (-T-1)^3 + 3(T-1)(-T-1),$$

woran man leicht sieht, dass sich der Leitterm wegkürzt. Also gilt $\deg(p(T,-T)) \leq 2$ und somit sind alle Nullstellen auch entlang dieser Ursprungsgeraden reell.

Insgesamt liegen auf jeder Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^2$ drei Nullstellen von p, wenn man mit Vielfachheiten zählt und Unendlich als Nullstelle zulässt. Also ist p rein reell.

In Kapitel 2 bis 5 werden die Werkzeuge zum Beweis der Verallgemeinerung einer solchen Darstellung eingeführt.

Die Frage, wann ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X,Y]$ als $\det(I_d + XA + YB)$ mit $A, B \in \mathbb{C}^{d\times d}$ hermitesch und $d = \deg(p)$ geschrieben werden kann, findet in der semidefiniten Optimierung Anwendung. Die zulässigen Mengen eines semidefiniten Optimierungsproblems sind sogenannte *Spektraeder*. Hier ist dann die Menge

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid I_d + xA + yB \text{ ist positiv semidefinit}\}$$

ein Spektraeder. In 6.10 wird eine Charakterisierung von Spektraedern dieser Form gezeigt, die in Kombination mit dem Hauptresultat hilfreich ist, um zu testen, wann eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ein Spektraeder ist. Also hilft der Satz von Helton und Vinnikov beim Entscheiden, wann eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ eine zulässige Menge eines semidefiniten Optimierungsproblems ist.

Betrachte nun wieder obiges Beispiel:

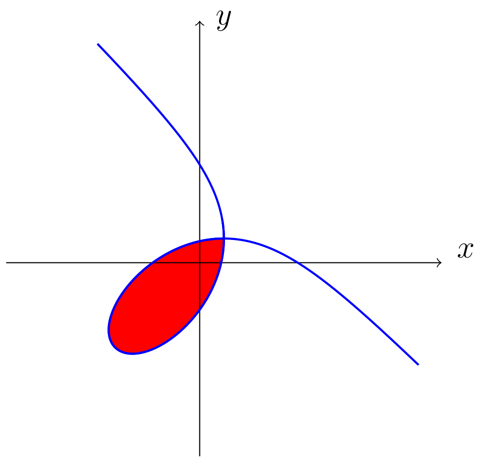


Abbildung 0.1: Nullstellenmenge von p, kartesisches Blatt[1]

Die Charakterisierung von Spektraedern in 6.10 wird dann zeigen, dass die rote Menge, die von der Nullstellenmenge eingeschlossen wird, ein Spektraeder ist.

[1] Die Grafik wurde vom Autor selbst mit TikZ erstellt.

1 Rein reelle Polynome

Definition 1.1 ([HV]). Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X,Y]$ mit $p(0) = 1$ heißt *rein reell*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ das univariate Polynom $p(xT, yT) \in \mathbb{R}[T]$ nur reelle Nullstellen besitzt.

Bemerkung 1.2. Aus der Bedingung $\forall x, y \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{C} : (p(xt, yt) = 0 \Longrightarrow t \in \mathbb{R})$ folgt direkt schon $p(0) \neq 0$, also kann ohne Einschränkung der konstante Koeffizient von p als 1 angenommen werden. Deshalb wird hier aus rein praktischen Gründen $p(0) = 1$ schon in der Definition gefordert.

Bemerkung 1.3. Rein reelle Polynome sind offensichtlich eine Verallgemeinerung von univariaten Polynomen mit nur reellen Nullstellen. Wenn $p \in \mathbb{R}[X]$ nur reelle Nullstellen besitzt und $p(0) = 1$ gilt, dann ist p rein reell. Denn seien $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{C}$ mit $p(xt) = 0$, dann ist $xt \in \mathbb{R}$ und somit auch $t \in \mathbb{R}$ (beachte, dass x nicht 0 sein darf).

Andererseits sind die univariaten rein reellen Polynome solche mit nur reellen Nullstellen, denn für $p \in \mathbb{R}[X]$ rein reell und $t \in \mathbb{C}$ folgt aus $0 = p(t) = p(1t)$ direkt mit der Definition $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.4. Sei $p := 1 - X^2 - Y^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$. p ist rein reell, da $p(0) = 1$ und für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $p(xT, yT) = 1 - (x^2 + y^2)T^2$, was nur reelle Nullstellen besitzt.

Beispiel 1.5. Lineare Polynome in $\mathbb{R}[X,Y]$ mit konstantem Koeffizienten 1 sind rein reell. Sei $l \in \mathbb{R}[X,Y]$ linear mit $l(0) = 1$. Dann ist $l(xT, yT) \in \mathbb{R}[T]$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ auch linear und normiert. Somit besitzt $l(xT, yT)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ nur reelle Nullstellen und l ist rein reell.

Erinnerung 1.6. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *hermitesch*, falls $A = A^*$ gilt. Hermitesche Matrizen besitzen ausschließlich reelle Eigenwerte und sind diagonalisierbar, also gibt es $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar mit QAQ^{-1} diagonal (Q kann sogar unitär gewählt werden).

Sprechweise 1.7. Falls es zu einem (rein reellen) Polynom $p \in \mathbb{R}[X,Y]$ hermitesche Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{d \times d}$ mit $p = \det(I_d + XA + YB)$ gibt (wobei $d := \deg(p)$), dann sagt man, dass p eine *hermitesche Determinantendarstellung* besitzt.

Definition 1.8. Seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{d\times d}$ hermitesche Matrizen. Dann nennt man die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A + xB + yC \text{ ist positiv semidefinit}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ einen *Spektraeder*.

Folgende Proposition stammt (für symmetrische statt hermitesche Matrizen) aus [HV] und ist die triviale Richtung des Hauptergebnisses dieser Arbeit.

Proposition 1.9 ([HV] 2.1(3))**.** Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesche Matrizen. Dann ist $p := \det(I_n + XA + YB) \in \mathbb{R}[X,Y]$ ein rein reelles Polynom.

Beweis. Offensichtlich ist $p(0) = 1$. Seien weiter $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{C}$ mit $p(xt, yt) = 0$. Gelte Œ $t \neq 0$ (sonst $t \in \mathbb{R}$). Definiere $s := t^{-1} \neq 0$. Es genügt also $s \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Es gilt

$$0 = p(xt, yt) = p(s^{-1}x, s^{-1}y)$$

und somit auch

$$\det(sI_n + xA + YB) = s^n \det(I_n + s^{-1}xA + s^{-1}yB) = s^n p(s^{-1}x, s^{-1}y) = 0.$$

Also ist s ein Eigenwert von $-xA - yB$. Da $-xA - yB$ hermitesch ist und hermitesche Matrizen nur reelle Eigenwerte besitzen, folgt $s \in \mathbb{R}$ und somit auch $t \in \mathbb{R}$. $\square$

In 1.9 sah man, dass wenn ein Polynom eine hermitesche Determinantendarstellung besitzt, es dann rein reell ist. Die Umkehrung gilt auch. Sie zu beweisen ist das Ziel dieser Arbeit:

Satz 1.10 (Helton und Vinnikov [HV])**.** Sei $p \in \mathbb{R}[X,Y]$. p ist genau dann rein reell, wenn p eine hermitesche Determinantendarstellung besitzt.

In [HV] wurde sogar gezeigt, dass man anstatt einer hermiteschen Determinantendarstellung auch eine symmetrische finden kann. Dieser Beweis ist aber um einiges komplizierter als der für hermitesche Determinantendarstellungen.

Beispiel 1.11. In Beispiel 1.5 hat man gesehen, dass lineare Polynome in $\mathbb{R}[X,Y]$ mit konstantem Koeffizienten 1 rein reell sind. Sei $l = aX + bY + 1 \in \mathbb{R}[X,Y]$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Dann besitzt l trivialerweise eine hermitesche Determinantendarstellung. Die Matrizen (a) und (b) sind hermitesch und es gilt $l = 1 + aX + bY = \det(I_1 + X(a) + Y(b))$.

Lemma 1.12 ([HV] 2.1(1) & 2.1(2))**.** Seien $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}[X,Y]$ mit $p_1(0) = \ldots = p_n(0) = 1$ und $p := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Dann ist p rein reell genau dann, wenn $p_1, \ldots, p_n$ alle rein reell sind.

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{C}$. Die Behauptung folgt direkt aus

$$p(xt, yt) = 0 \iff (p_1(xt, yt) = 0 \text{ oder } \ldots \text{ oder } p_n(xt, yt) = 0)$$

und aus Definition 1.1. $\square$

Lemma 1.13 ([HV] 2.1(4))**.** Seien $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}[X, Y]$ rein reell mit hermiteschen Determinantendarstellungen

$$p_i = \det(I_{d_i} + XA_i + YB_i)$$

$(A_i, B_i \in \mathbb{C}^{d_i \times d_i}$ hermitesch, $d_i = \deg(p_i),\ i \in \{1, \ldots, n\})$. Dann besitzt

$$p := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$$

auch eine hermitesche Determinantendarstellung und zwar:

$$p = \det\left(I_d + X \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_n \end{pmatrix} \right),$$

wobei $d = \deg(p) = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} p &= p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \\ &= \det(I_{d_1} + XA_1 + YB_1) \cdot \ldots \cdot \det(I_{d_n} + XA_n + YB_n) \\ &= \det \begin{pmatrix} I_{d_1} + XA_1 + YB_1 & & \\ & \ddots & \\ & & I_{d_n} + XA_n + YB_n \end{pmatrix} \\ &= \det\left(I_d + X \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_n \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

$\square$

2 Matrixpolynome

Sprechweise 2.1. Die Elemente von $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{d\times d}$ werden *Matrixpolynome* genannt.

Bemerkung und Notation 2.2. Wegen $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{d\times d} = \mathbb{C}^{d\times d}[X_1, \dots, X_n]$ kann man über den (totalen) Grad eines Matrixpolynom reden, der wie der (totale) Grad von Polynomen mit deg notiert wird. Setze hierbei wie gewohnt $\deg 0 = -\infty$.

Notation 2.3. Sei $A \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{d\times m}$ und $x \in \mathbb{C}^n$, dann wird mit $A(x)$ die Matrix notiert, die durch Auswerten jeden Eintrages von A in x entsteht. Also für $A = (p_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,d\}\times\{1,\dots,m\}}$ ist $A(x) = (p_{i,j}(x))_{(i,j)\in\{1,\dots,d\}\times\{1,\dots,m\}} \in \mathbb{C}^{d\times m}$, wobei $p_{i,j} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ für $i \in \{1, \dots, d\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$.

Bemerkung 2.4. Seien $A, B \in \mathbb{C}[X]^{n\times m}$ mit $A(x) = B(x)$ für unendlich viele $x \in \mathbb{C}$ (zum Beispiel für alle $x \in \mathbb{R}$). Dann gilt $A = B$, da jeder Eintrag von $B - A$ in unendlich vielen Punkten verschwindet und Polynome $\neq 0$ in einer Unbekannten nur endlich viele Nullstellen besitzen.

Dies wird später hilfreich sein, um einige Eigenschaften von Matrizen auf Matrixpolynome zu übertragen.

Im Folgenden wird der Begriff einer hermiteschen Matrix auf Matrixpolynome erweitert.

Notation 2.5. Sei $A = X^dA_d+\ldots+XA_1+A_0 \in \mathbb{C}[X]^{n\times m}$ und $A_0, \dots, A_d \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Mit A^* wird die Matrix, welche durch Transponieren und komplex Konjugieren der Koeffizienten von A entsteht, notiert. Also

$$A^* = X^dA_d^* + \ldots + A_0^*.$$

Definition 2.6. Ein Matrixpolynom $A \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ heißt *hermitesch*, wenn $A^* = A$ gilt.

Warnung 2.7. Sei $A = X^dA_d + \ldots + A_0 \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{C}$. Es gilt also

$$A^*(x) = x^dA_d^* + \ldots + xA_1^* + A_0^*,$$

was im Allgemeinen ungleich

$$A(x)^* = (x^d A_d + \ldots + xA_1 + A_0)^* = (x^d)^* A_d^* + \ldots + x^* A_1^* + A_0^* = A^*(x^*)$$

ist.

Erinnerung 2.8. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $\det(A^*) = \det(A)^*$.

Rechenregel 2.9. Seien $A, B \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ Matrixpolynome und sei $x \in \mathbb{C}$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

1. $(BA)^* = A^* B^*$
2. $(AB)(x) = A(x)B(x)$
3. $A(x)^* = A^*(x^*)$
4. $A^*(x) = A(x^*)^*$
5. $\det(A^*) = \det(A)^*$

Beweis. Schreibe $A = X^d A_d + \ldots + A_0$ und $B = X^e B_e + \ldots + B_0$ mit $A_d, \ldots, A_0$, $B_e, \ldots, B_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 1. folgt aus

$$\begin{aligned} A^* B^* &= \left(\sum_{i=0}^{d} X^i A_i^*\right)\left(\sum_{j=0}^{e} X^j B_j^*\right) \\ &= \sum_{k=0}^{d+e}\left(\sum_{i+j=k} X^k A_i^* B_j^*\right) \\ &= \sum_{k=0}^{d+e}\left(\sum_{i+j=k} X^k (B_j A_i)^*\right) \\ &= (BA)^*. \end{aligned}$$

2. folgt aus

$$\begin{aligned} (AB)(x) &= \sum_{k=0}^{d+e}\left(\sum_{i+j=k} x^k A_i B_j\right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{d} x^i A_i\right)\left(\sum_{j=0}^{e} x^j B_j\right) \\ &= A(x)B(x). \end{aligned}$$

3. wurde schon am Ende von 2.7 gemacht und 4. ist 3. auf x^* angewandt.

Da die Determinante eine polynomiale Funktion in den Einträgen der Matrix ist, gilt $\det(A(x)) = (\det A)(x)$. Zeige für 5., dass $\det(A^*)(x) = \det(A)^*(x)$ für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt. Sei $x \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A^*)(x) &= \det(A^*(x)) \\
&= \det(A(x^*)^*) \\
&\overset{2.8}{=} \det(A(x^*))^* \\
&= \det(A)(x^*)^* \\
&= \det(A)^*(x).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt natürlich direkt $\det(A^*) = \det(A)^*$. □

Bemerkung 2.10. Es ist also $A \in \mathbb{C}[X]^{n \times n}$ in $\mathbb{C}(X)^{n \times n}$ genau dann invertierbar, wenn A^* in $\mathbb{C}(X)^{n \times n}$ invertierbar ist, denn $\det(A^*) = \det(A)^*$ und ein Matrixpolynom in $\mathbb{C}(X)^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn es eine Determinante ungleich null besitzt.

Notation 2.11. Sei R eine Menge und $A \in R^{n \times n}$. Dann ist A_I für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die $(\#I) \times (\#I)$-Matrix, die aus A durch Streichen der Spalten i und Zeilen i mit $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$ entsteht.

Erinnerung 2.12 (Leibniz-Formel)**.** Sei R ein Ring und $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in R^{n \times n}$. Bezeichne mit S_n die symmetrische Gruppe von $\{1, \ldots, n\}$. Dann gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

wobei $\operatorname{sgn}(\sigma)$ das Signum von $\sigma \in S_n$ ist.

Erinnerung 2.13. Sei R ein Ring (zum Beispiel $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}[X]$) und $A \in R^{n \times n}$ eine Matrix. Dann sieht man an der Leibniz-Formel 2.12, dass

$$\det(TI_n + A) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, \\ \#I = n-i}} \det(A_I) \right) T^i.$$

Erinnerung 2.14. Sei R ein Ring und $A \in R^{n \times n}$. $\chi_A := \det(TI_n - A) \in R[T]$ ist das *charakteristische Polynom* von A.

Lemma 2.15. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A = T^n$. Dann gilt $A = 0$.

Beweis. Da A hermitesch ist, lässt sich A so diagonalisieren, dass auf der Diagonalen die Eigenwerte von A stehen, die aber wegen $\chi_A = T^n$ alle gleich null sind. Also gibt es ein invertierbares $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $QAQ^{-1} = 0$. Somit gilt $A = 0$. $\square$

Lemma 2.15 wird in Lemma 4.3 in [GKVW] stillschweigend verwendet, ist aber auch relativ einfach zu sehen.

Satz 2.16 ([GKVW] Lemma 4.3)**.** Sei $A \in \mathbb{C}[X]^{d\times d}$ ein hermitesches Matrixpolynom. Wenn $\chi_A = \det(TI_d - A) \in \mathbb{C}[T, X]$ höchstens Grad d hat, dann ist A linear, also A hat höchstens Grad 1. Beachte, dass dann χ_A automatisch Grad d hat.

Beweis. Habe also $\det(TI_d - A)$ höchstens Grad d. Schreibe

$$\det(TI_d - A) = T^d + p_{d-1}T^{d-1} + \ldots + p_0$$

mit $p_j \in \mathbb{C}[X]$ für $j \in \{0, \ldots, d-1\}$. Für $j \in \{0, \ldots, d-1\}$ gilt $\deg(p_j) \leq d - j$, da nach Voraussetzung $\det(TI_d - A)$ höchstens Grad d hat. Definiere $k := \deg(A)$. Schreibe

$$-A = \sum_{i=0}^{k} B_i X^i$$

mit $B_i \in \mathbb{C}^{d\times d}$ hermitesch für $i \in \{0, \ldots, k\}$. Wegen Erinnerung 2.13 und der Definition von p_j gilt

$$p_j = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,d\},\\ \#I=d-j}} \det((-A)_I) = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,d\},\\ \#I=d-j}} \det\left(\left(B_0 + \ldots + B_k X^k\right)_I\right)$$

für $j \in \{0, \ldots, d-1\}$. Um für $j \in \{0, \ldots, d-1\}$ den Koeffizienten von $X^{k(d-j)}$ in p_j zu bekommen, muss man beim Ausrechnen der Determinante mit der Leibniz-Formel 2.12 in jedem Schritt ein Element aus dem letzten Summanden (also von $B_k X^k$) nehmen. Also ist der Koeffizient von $X^{k(d-j)}$ in p_j gerade $\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,d\},\\ \#I=d-j}} \det((B_k)_I)$ für alle $j \in \{0, \ldots, d-1\}$. Es ist zu zeigen, dass A linear ist, also ist $k \leq 1$ zu zeigen.

Annahme: Gelte $k \geq 2$.

Da für alle $j \in \{0, \dots, d-1\}$ p_j höchstens Grad $d-j$ hat, ist der Koeffizient von $X^{k(d-j)}$ gleich null, also

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,d\},\\ \#I = d-j}} \det((B_k)_I) = 0.$$

Wieder mit Erinnerung 2.13 folgt

$$\begin{aligned}
\chi_{-B_k} &= \det(TI_d + B_k) \\
&= \sum_{i=0}^{d} \left(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,d\},\\ \#I = d-i}} \det((B_k)_I) \right) T^i \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,d\},\\ \#I = 0}} \det((B_k)_I) T^d + \sum_{i=0}^{d-1} \underbrace{\left(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,d\},\\ \#I = d-i}} \det((B_k)_I) \right)}_{=0} T^i \\
&= \det((B_k)_\emptyset) T^d \\
&= T^d.
\end{aligned}$$

Da $-B_k$ hermitesch ist und $\chi_{-B_k} = T^d$ gilt, folgt mit Lemma 2.15, dass $-B_k = 0$. Dies kann aber nicht sein, da B_k der Leitkoeffizient von $-A$ war. ↯

Also gilt wie gewünscht $\deg(A) = k \leq 1$. □

Obiger Satz 2.16 stellt später sicher, dass die gefundene Determinantendarstellung auch wirklich linear ist.

3 Matrixpolynomfaktorisierung

Ziel dieses Kapitels ist es, positiv semidefinite Matrixpolynome ähnlich wie bei der Cholesky-Zerlegung zu faktorisieren. Also wird zu einem positiv semidefiniten Matrixpolynom A ein Matrixpolynom Q gesucht mit $A = Q^*Q$. Dies wird eine wichtige Rolle im Beweis des Satzes von Helton und Vinnikov spielen.

Das ganze Kapitel stammt aus [HS].

Erinnerung 3.1. Eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt positiv semidefinit, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

- $\forall x \in \mathbb{C}^n : x^*Ax \geq 0$
- $\forall I \subseteq \{1, \ldots, n\} : \det(A_I) \geq 0$
- $\exists Q \in \mathbb{C}^{n\times n} : A = Q^*Q$

Definition 3.2. Ein Matrixpolynom $A \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ heißt *positiv semidefinit*, falls $A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv semidefinit ist.

Beispiel 3.3. Das Matrixpolynom $A = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 + X^2 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit, da $\det(A(x)_{\{1\}}) = 1 \geq 0,\ \det(A(x)_{\{2\}}) = 1 + x^2 \geq 0$ und $\det(A(x)_{\{1,2\}}) = 1 + x^2 - 1 = x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung 3.4. Definition 3.2 fordert implizit auch, dass A hermitesch ist, da aus $A(x) = A(x)^*$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Bemerkung 2.4 auch $A = A^*$ folgt. Beachte hierfür, dass $A(x)^* = A^*(x^*) = A^*(x)$ für reelles x gilt.

Nun ein paar Erinnerungen aus der linearen Algebra zur orthogonalen Projektion und Einsetzung von Matrizen in Matrixpolynome, die zur Faktorisierung von Matrixpolynomen benötigt werden.

Definition 3.5. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann heißt die lineare Abbildung

$$P_U : V \to V, v \mapsto \text{das eindeutig bestimmte } w \in V \text{ mit } \langle v - w, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U$$

orthogonale Projektion auf U.

Definition 3.6. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann heißt

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : \langle v, u \rangle = 0\}$$

das *orthogonale Komplement* von U in V.

Erinnerung 3.7. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gelten folgende Aussagen:

- $\mathrm{im}(P_U) = U$ und $\ker(P_U) = U^\perp$
- $\forall u \in U : P_U(u) = u$
- $\mathrm{im}(P_U) \oplus \ker(P_U) = U \oplus U^\perp = V$
- $P_U + P_{U^\perp} = \mathrm{id}_V$
- $P_U \circ P_U = P_U$
- P_U ist selbstadjungiert ($P_U^* = P_U$)
- $P_U \circ P_{U^\perp} = 0 = P_{U^\perp} \circ P_U$

Erinnerung 3.8. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $f : V \to V$ linear. Dann gilt $\ker(f^*) = (\mathrm{im}(f))^\perp$ und $\mathrm{im}(f^*) = (\ker(f))^\perp$, hierbei ist f^* die zu f adjungierte Abbildung.

Definition 3.9. Sei $N = X^d N_d + \ldots + N_0 \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ ein Matrixpolynom ($N_0, \ldots, N_d \in \mathbb{C}^{n\times n}$). Sei weiter $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Dann heißt

$${}_AN = A^d N_d + \ldots + AN_1 + N_0 \quad (N_A = N_d A^d + \ldots + N_1 A + N_0)$$

Linkseinsetzung von A in N (beziehungsweise *Rechtseinsetzung* von A in N).

Erinnerung 3.10. Sei $N \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt

$$_A N = 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}[X]^{n\times n} : (XI_n - A)Q = N$$

und

$$N_A = 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}[X]^{n\times n} : Q(XI_n - A) = N$$

Lemma 3.11 ([HS])**.** Sei $z \in \mathbb{C}$ und seien $P, N \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ zwei Matrixpolynome mit $(X - z^*)(X - z)P = N^*N$. Dann gibt es ein $Q \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $P = Q^*Q$ und ein $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $N = (XI_n - A)Q$.

Beweis. Es ist ein $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$z^* z I_n = A^*A, \tag{3.1}$$

$$(z^* + z)I_n = A^* + A, \tag{3.2}$$

$$_A N = 0 \tag{3.3}$$

gesucht, denn dann gilt $(X - z^*)(X - z)I_n = (XI_n - A^*)(XI_n - A)$ und nach Erinnerung 3.10 $N = (XI_n - A)Q$ für ein $Q \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$. Somit würde aus

$$\begin{aligned}(X - z^*)(X - z)P &= N^*N \\ &= Q^*(XI_n - A^*)(XI_n - A)Q \\ &= Q^*(X - z^*)(X - z)I_nQ \\ &= (X - z^*)(X - z)Q^*Q\end{aligned}$$

$P = Q^*Q$ folgen.

Nun eine mögliche Wahl von A und der Beweis der Aussagen (3.1), (3.2) und (3.3):

Definiere $U := \ker(N(z)^*) = \ker(N^*(z^*))$. Dann gilt nach Erinnerung 3.8 $U^\perp = \operatorname{im}(N(z))$. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Darstellungsmatrix von $zP_U + z^*P_{U^\perp}$ bezüglich der Standardbasis.

(3.1): Mit Erinnerung 3.7 folgt

$$\begin{aligned}
(zP_U + z^*P_{U^\perp})^* \circ (zP_U + z^*P_{U^\perp}) &= (z^*P_U^* + zP_{U^\perp}^*) \circ (zP_U + z^*P_{U^\perp}) \\
&= (z^*P_U + zP_{U^\perp}) \circ (zP_U + z^*P_{U^\perp}) \\
&= z^*zP_U^2 + z^*z^* \underbrace{P_U \circ P_{U^\perp}}_{=0} + zz \underbrace{P_{U^\perp} \circ P_U}_{=0} + zz^*P_{U^\perp}^2 \\
&= z^*zP_U^2 + zz^*P_{U^\perp}^2 \\
&= z^*zP_U + z^*zP_{U^\perp} \\
&= z^*z(P_U + P_{U^\perp}) \\
&= z^*z \operatorname{id}_V .
\end{aligned}$$

(3.2): Wieder mit Erinnerung 3.7 folgt

$$\begin{aligned}
(zP_U + z^*P_{U^\perp})^* + (zP_U + z^*P_{U^\perp}) &= (z^*P_U^* + zP_{U^\perp}^*) + (zP_U + z^*P_{U^\perp}) \\
&= (z^*P_U + zP_{U^\perp}) + (zP_U + z^*P_{U^\perp}) \\
&= (z^* + z)(P_U + P_{U^\perp}) \\
&= (z^* + z) \operatorname{id}_V .
\end{aligned}$$

(3.3): Es genügt $N^*_{A^*} = 0$ zu zeigen. Sei $v \in \mathbb{C}^n$. Zu zeigen ist $N^*_{A^*}v = 0$. Schreibe $N = X^dN_d + \ldots + XN_1 + N_0$, wobei $N_0, \ldots, N_d \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt mit 3.7

$$\begin{aligned}
N^*_{A^*}v &= N_d^*(A^*)^d v + \ldots + N_0^* v \\
&= N_d^*((zP_U + z^*P_{U^\perp})^*)^d(v) + \ldots + N_0^* v \\
&= N_d^*(z^*P_U + zP_{U^\perp})^d(v) + \ldots + N_0^* v \\
&\overset{\substack{P_U \circ P_{U^\perp} = 0 \\ P_U^2 = P_U}}{=} N_d^*((z^*)^dP_U + z^dP_{U^\perp})(v) + \ldots + N_0^* v \\
&= \left(N_d^*(z^*)^dP_U(v) + \ldots + N_0^*P_U(v)\right) + \left(N_d^*z^dP_{U^\perp}(v) + \ldots + N_0^*P_{U^\perp}(v)\right) \\
&= \underbrace{N^*(z^*) \underbrace{P_U(v)}_{\in U = \ker(N^*(z^*))}}_{=0} + N^*(z)P_{U^\perp}(v) \\
&= N^*(z)P_{U^\perp}(v).
\end{aligned}$$

Es genügt $N^*(z)P_{U^\perp}(v) = 0$ zu zeigen. Da $P_{U^\perp}(v) \in \operatorname{im}(N(z))$ gilt, wähle

$w \in \mathbb{C}^n$ mit $N(z)w = P_{U^\perp}(v)$. Insgesamt gilt

$$0 = (z - z^*)(z - z)Pw = N^*(z)N(z)w = N^*(z)P_{U^\perp}(v).$$

Also gilt ${}_AN = 0$. Wähle wie oben beschrieben $Q \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $N = (XI_n - A)Q$. Dann gilt wie oben gezeigt $P = Q^*Q$. □

Korollar 3.12. Sei $f \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom ungleich 0 und seien $P, N \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ Matrixpolynome mit $f^*fP = N^*N$. Dann gibt es ein $Q \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $P = Q^*Q$. Außerdem gibt es dann ein $M \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $N = MQ$.

Beweis. Wende Lemma 3.11 mehrmals an und normiere gegebenenfalls f. □

Das vorangegangene Korollar 3.12 spielt in der Faktorisierung von positiv semidefiniter Matrixpolynome eine entscheidende Rolle.

Bemerkung 3.13. Sei $p \in \mathbb{R}[X]$ mit $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{C}[X]$ mit $p = q^*q$, denn:

Gelte Œ $p \neq 0$ (sonst nehme einfach $q = 0$). Mit dem Fundamentalsatz der Algebra kann man p folgendermaßen schreiben

$$p = a\prod_{i=1}^{d}(X - x_i)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{e}((X - z_j)(X - z_j^*)),$$

wobei $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind, $z_1, \ldots, z_e \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Wegen $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ und $a > 0$. Wähle nun einfach

$$q := \sqrt{a}\prod_{i=1}^{d}(X - x_i)^{\frac{\alpha_i}{2}}\prod_{j=1}^{e}(X - z_j).$$

Es gilt also $p = q^*q$.

Lemma 3.14 ([HS])**.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & C \end{pmatrix},$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}^{n-1}$ und $C \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ hermitesch. Sei weiter

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -b^* \\ 0 & aI_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dann gelten:

1. $U^*AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & aI_{n-1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & aC - bb^* \end{pmatrix}}_{=AU} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & aC - bb^* \end{pmatrix}$

2. Wenn A positiv semidefinit ist, so ist $aC - bb^*$ auch positiv semidefinit.

3. $a^{2n-2} \det(A) = a^n \det(aC - bb^*)$.

Beweis. 1. ist klar.

Wenn A positiv semidefinit ist, dann ist auch U^*AU positiv semidefinit. Mit 3.1 folgt, dass $a(aC - bb^*)$ positiv semidefinit ist, also ist auch $a^{-1}a(aC - bb^*) = aC - bb^*$ positiv semidefinit, falls $a > 0$. Wenn $a = 0$ gilt, so ist auch $b = 0$, da A positiv semidefinit ist. Also gilt dann $aC - bb^* = 0$. Somit ist in beiden Fällen $aC - bb^*$ positiv semidefinit.

Wegen 1. gilt

$$a^{2n-2} \det(A) = \det(U^2) \det(A) = \det(U^*AU) = a^n \det(aC - bb^*).$$

$\square$

Später wird eine stärkere Version des folgenden Satzes gebraucht, aber zum besseren Verständnis und da er beim Beweis der stärkeren Version verwendet wird, wird diese abgeschwächte Version von 3.24 trotzdem hier bewiesen.

Satz 3.15 ([HS])**.** Sei $A \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$. Dann ist A genau dann positiv semidefinit, wenn es ein $Q \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $A = Q^*Q$ gibt.

Beweis. Die Rückrichtung ist mit 3.1 sofort klar. Die Hinrichtung wird per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ bewerkstelligt.

<u>IA:</u> Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen.

<u>IV:</u> Für alle positiv semidefiniten $C \in \mathbb{C}[X]^{(n-1)\times(n-1)}$ gebe es ein $S \in \mathbb{C}[X]$ mit $C = S^*S$.

<u>IS $(n-1) \to n$ $(n \in \mathbb{N})$:</u> Zerlege A ähnlich wie im obigen Lemma 3.14. Wähle also $a \in \mathbb{R}[X], b \in \mathbb{C}[X]^{n-1}$ und $C \in \mathbb{C}[X]^{(n-1)\times(n-1)}$ hermitesch mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & C \end{pmatrix}.$$

1. $\underline{a = 0}$: Da $A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv semidefinit ist, gilt $b(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $b = 0$. Also gilt
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$
Da A positiv semidefinit ist, ist auch $C \in \mathbb{C}[X]^{(n-1)\times(n-1)}$ positiv semidefinit. Wähle mit der Induktionsvoraussetzung $S \in \mathbb{C}[X]^{(n-1)\times(n-1)}$ mit $C = S^*S$. Für $Q := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ gilt jetzt aber wie gewünscht $A = Q^*Q$.

2. $\underline{a \neq 0}$: Es ist nach Lemma 3.14 $aC - bb^*$ positiv semidefinit (da $(aC - bb^*)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv semidefinit ist) und man kann mittels der Induktionsvoraussetzung ein $S \in \mathbb{C}[X]^{(n-1)\times(n-1)}$ wählen mit $aC - bb^* = S^*S$. Dann gilt für $N := \begin{pmatrix} a & b^* \\ 0 & S \end{pmatrix}$
$$N^*N = \begin{pmatrix} a^*a & ab^* \\ ab & bb^* + S^*S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab^* \\ ab & aC \end{pmatrix} = aA.$$
Da $a(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, kann man mit Bemerkung 3.13 ein $q \in \mathbb{C}[X]$ mit $a = q^*q$ wählen. Also ist man mit $q^*qA = N^*N$ genau in der Situation von Korollar 3.12 und bekommt ein $Q \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $A = Q^*Q$.

□

Folgende Definition ist nötig um einen Fehler in [HS] in Lemma 3.21, der auch in der ursprünglichen Version dieser Arbeit gemacht wurde, zu reparieren.

Definition 3.16. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *schiefhermitesch*, wenn $-A = A^*$ gilt oder äquivalent wenn $\mathbf{i}A$ hermitesch ist.

Lemma 3.17. Sei $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) \neq 0$.

Beweis. Wähle $p, q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ mit $f = p + \mathbf{i}q$. Es gilt $p \neq 0$ oder $q \neq 0$. Wähle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $p(x) \neq 0$ oder $q(x) \neq 0$. Somit gilt $f(x) = p(x) + \mathbf{i}q(x) \neq 0$, da der Imaginär- oder Realteil von $f(x)$ ungleich 0 ist. □

Lemma 3.18. Seien $A_1, \dots, A_d \in \mathbb{C}^{n\times n} \setminus \{0\}$ hermitesch. Dann gibt es ein $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit
$$v^*A_1v \cdot \ldots \cdot v^*A_dv \neq 0.$$

Beweis. Setze $w := (X_1, \dots, X_n)^T + \mathbf{i}(Y_1, \dots, Y_n)^T$. Sei $i \in \{1, \dots, d\}$. Da $A_i \neq 0$ hermitesch ist, gibt es einen Eigenvektor $v \neq 0$ zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ und es gilt $v^* A_i v = \lambda \|v\|^2 \neq 0$. Wenn man für die X_j die Realteile der Einträge in v und für die Y_j die Imaginärteile von v in $w^* A_i w \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ einsetzt, bekommt man genau $\lambda \|v\|^2 \neq 0$. Also ist $w^* A_i w$ nicht das Nullpolynom.

Also ist auch $w^* A_1 w \cdot \ldots \cdot w^* A_d w \neq 0$. Nach Lemma 3.17 gibt es dann ein $x \in \mathbb{R}^{2n}$ so, dass $(w^* A_i w)(x) \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt. Also erfüllt $(x_1, \dots, x_n)^T + \mathbf{i}(x_{n+1}, \dots, x_{2n})^T \in \mathbb{C}^n$ die Behauptung. □

Bemerkung 3.19. Wegen der zweiten Definition von schiefhermiteschen Matrizen 3.16, gilt vorheriges Lemma auch für schiefhermitesche Matrizen.

Lemma 3.20. Es gibt für gegebene $A_1, \dots, A_d \in \mathbb{C}^{n \times n} \setminus \{0\}$ ein $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ derart, dass

$$v^* A_1 v \cdot \ldots \cdot v^* A_d v \neq 0.$$

Beweis. Da die A_i ungleich 0 sind für alle $i \in \{1, \dots, d\}$, gilt $A_i + A_i^* \neq 0$ oder $A_i - A_i^* \neq 0$. Nehme durch Umordnen an, dass ein $k \in \{0, \dots, d\}$ existiert derart, dass $A_i + A_i^* \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und für alle $i \in \{k+1, \dots, d\}$ $A_i - A_i^* \neq 0$ gilt. Für $i \in \{1, \dots, k\}$ ist $A_i + A_i^* \neq 0$ hermitesch und für $i \in \{k+1, \dots, d\}$ ist $A_i - A_i^* \neq 0$ schiefhermitesch, also existiert nach 3.18 (bzw. nach der Bemerkung danach) ein $v \in \mathbb{C}^n$ mit

$$v^*(A_1 + A_1^*)v \cdot \ldots \cdot v^*(A_k + A_k^*)v \cdot v^*(A_{k+1} - A_{k+1}^*)v \cdot \ldots \cdot v^*(A_d - A_d^*)v \neq 0.$$

Zeige nun noch, dass $v^* A_i v \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt.

Sei nun dazu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{C}^n$ mit $v^*(A + A^*)v \neq 0$ oder $v^*(A - A^*)v \neq 0$. Es ist $v^* A v \neq 0$ zu zeigen. Kontraposition: Gelte $v^* A v = 0$. Es gilt $(v^* A v)^* = v^* A^* v$, also folgt direkt

$$v^*(A + A^*)v = v^* A v + v^* A^* v = 0 \text{ und } v^*(A - A^*)v = v^* A v - v^* A^* v = 0.$$

□

Lemma 3.21 ([HS])**.** Sei $A \in \mathbb{C}[X]^{n \times n}$ ein Matrixpolynom. Dann gilt mindestens eine der folgenden drei Aussagen:

1. Es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $A(z) = 0$.

2. $\det A = 0$.

3. Es gibt ein $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ derart, dass $v^* A v$ und $\det A$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

Beweis. Gelten die Aussagen 1. und 2. nicht. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $\det A$. Für alle $i \in \{1, \ldots, d\}$ gilt $A(\alpha_i) \neq 0$. Nach Lemma 3.20 gibt es ein $v \in \mathbb{C}^n$ derart, dass $v^* A(\alpha_1) v \cdot \ldots \cdot v^* A(\alpha_d) v \neq 0$ gilt. Also haben $v^* A v$ und $\det A$ keine gemeinsamen Nullstellen. $\square$

Bemerkung 3.22 ([HS]). Sei $A \in \mathbb{C}[X]^{n \times n}$ ein positiv semidefinites Matrixpolynom. Dann ist $\deg(A) \in \{-\infty, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$, denn es gilt

$$\deg(A) = \sup\{\deg(v^* A v) \mid v \in \mathbb{C}^n\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$$

für hermitesche Matrixpolynome. „$\geq$" ist klar und „$\leq$" folgt aus geschickter Wahl eines $v \in \mathbb{C}^n$ mit $\deg(v^* A v) = \deg(A)$ (zum Beispiel $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zu einem Eigenwert ungleich 0 des hermiteschen Leitkoeffizienten von A). Es ist $\deg(v^* A v) \in \{-\infty, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ klar, denn $(v^* A v)(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $v \in \mathbb{C}^n$, da A positiv semidefinit ist.

Folgendes Lemma wurde in [HS] ohne Beweis verwendet, deshalb hier nun ein Beweis des Autors.

Lemma 3.23. Sei $A \in \mathbb{C}[X]^{n \times n}$ hermitesch und $z \in \mathbb{R}$. Sei $A(x)$ positiv semidefinit für alle $x > z$ und sei $A(x)$ negativ semidefinit für alle $x < z$, dann gilt $A(z) = 0$.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{C}^n$. Es genügt $v^* A(z) v = 0$ zu zeigen. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto v^* A(x) v \quad (x \in \mathbb{R})$ folgt dies sofort. $\square$

Satz 3.24 ([HS]). Sei $A \in \mathbb{C}[X]^{n \times n}$ ein positiv semidefinites Matrixpolynom. Dann gibt es ein $Q \in \mathbb{C}[X]^{n \times n}$ mit

$$A = Q^* Q,$$

wobei alle Nullstellen von $\det(Q)$ nichtnegativen Imaginärteil haben, falls $\det(A) \neq 0$.

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei verschachtelten Induktionen. Die äußere Induktion erfolgt nach der Größe des Matrixpolynoms $n \in \mathbb{N}_0$ und die innere Induktion nach dem Grad des Matrixpolynoms $d := \deg(A) \overset{3.22}{\in} \{-\infty, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$.

Der Induktionsschritt wird mittels einer Fallunterscheidung bewerkstelligt, die Lemma 3.21 liefert. In dem zweiten Fall liefert dieser Satz keine weiteren Informationen im Vergleich zu 3.15. In dem ersten Fall wird die innere Induktionsvoraussetzung mit den

Matrixpolynomen von kleinerem Grad und in dem letzten Fall wird die äußere Induktionsvoraussetzung für kleinere Matrixpolynome angewandt. In dem letzten Fall geht dann wie in 3.15 wieder Korollar 3.12 ein.

IA (Äußere Induktion):

Für $n = 0$ gibt es nichts zu zeigen.

IA (Innere Induktion):

Für $d = -\infty$ wähle $Q = 0$, dann gilt $A = 0 = 0^*0 = Q^*Q$. Für $d = 0$ folgt die Behauptung aus der Cholesky-Zerlegung beziehungsweise aus dem dritten Punkt von 3.1.

IV (Äußere Induktion):

Für $P \in \mathbb{C}[X]^{(n-1)\times(n-1)}$ positiv semidefinit gibt es ein $S \in \mathbb{C}[X]^{(n-1)\times(n-1)}$ mit $P = S^*S$ und derart, dass die Nullstellen von $\det(S)$ alle nichtnegativen Imaginärteil besitzen oder dass $\det(S) = 0$ gilt.

IV (Innere Induktion):

Für $P \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ positiv semidefinit vom Grad $d - 2$ gibt es ein $S \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $P = S^*S$ und derart, dass die Nullstellen von $\det(S)$ alle nichtnegativen Imaginärteil besitzen oder dass $\det(S) = 0$ gilt.

IS ($(n-1) \to n$, $(d-2) \to d$ $(n \in \mathbb{N}, d \in 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\})$):

Der Induktionsschritt wird mittels einer Fallunterscheidung bewerkstelligt. Die Fälle liefert Lemma 3.21.

1. $\exists z \in \mathbb{C} : A(z) = 0$: Gelte Œ $\det(A) \neq 0$ (sonst betrachte einfach Fall 2). Zuerst wird gezeigt, dass man $P \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $A = (X - z^*)(X - z)P$ wählen kann:

   Falls $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so gilt $A(z^*) = A^*(z^*) = A(z)^* = 0$. Wähle dann also $P \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $A = (X - z^*)(X - z)P$. Falls aber $z \in \mathbb{R}$ gilt, so gibt es $B \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $A = (X - z)B$. Dann ist für $x < z$ $B(x)$ negativ semidefinit und für $x > z$ $B(x)$ positiv semidefinit, also ist $B(z) = 0$. Somit kann man auch in diesem Fall ein $P \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $A = (X - z^*)(X - z)P$ wählen.

   Habe also nun $P \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $A = (X - z^*)(X - z)P$ und $\operatorname{Im}(z) \geq 0$. Dann gilt $\deg(P) = \deg(A) - 2$ und P ist positiv semidefinit. Es gilt $\det(P) \neq 0$, denn sonst wäre $\det(A) = ((X - z^*)(X - z))^n \det(P) = 0$. Wende nun die innere Induktionsvoraussetzung an und erhalte $S \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $P = S^*S$ und derart, dass alle Nullstellen von $\det(S)$ nichtnegativen Imaginärteil haben. Wähle nun $Q := (X-z)S$, dann gilt

$$A = (X - z^*)(X - z)P = (X - z^*)(X - z)S^*S = ((X - z)S)^*(X - z)S = Q^*Q$$

und alle Nullstellen von $\det(Q) = (X - z)^n \det(S)$ haben nichtnegativen Imaginärteil.

2. $\underline{\det(A) = 0}$: Wegen $\det(A) = 0$ ist $\det(Q) = 0$ für ein $Q \in \mathbb{C}[X]^{n \times n}$ mit $A = Q^*Q$. Also folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.15.

3. Es gebe ein $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ so, dass v^*Av und $\det(A)$ keine gemeinsame Nullstelle besitzen.

   Sei Œ $v = e_1$, wobei e_1 der erste Einheitsvektor des $\mathbb{C}^n$ ist. Dies ist legitim, denn:

   Wähle $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär derart, dass $U^*v = \lambda e_1$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\lambda = \|v\|_2$). Dann kann man $\lambda^2 U^*AU$ anstatt A und e_1 anstatt v betrachten. Dies geht, denn es gilt $v^*Av = e_1^* \lambda^2 U^*AUe_1$ und falls eine Matrix $Q \in \mathbb{C}[X]$ mit $\lambda^2 U^*AU = Q^*Q$ gefunden wurde, so gilt natürlich $(\lambda QU^*)^*(\lambda QU^*) = A$ und $\det(\lambda QU^*) = \lambda^n \det(Q) \det(U) = \lambda^n \det(Q)$. Also sind die Nullstellen von $\det(Q)$ und von $\det(\lambda QU^*)$ dieselben.

   Weiter gilt für $\lambda^2 U^*AU$ immer noch die Voraussetzung des dritten Falls. Sei also $x \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\det(\lambda^2 U^*AU)$. Dann ist x auch eine Nullstelle von $\det(A)$, denn U ist eine konstante Matrix. Somit gilt nun $e_1^* \lambda^2 U^*A(x)Ue_1 = v^*A(x)v \neq 0$. Also gilt die Voraussetzung des dritten Falls.

   Sei also Œ $v = e_1$. Schreibe wieder wie in Lemma 3.14

$$A = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & C \end{pmatrix},$$

   wobei $a \in \mathbb{R}[X], b \in \mathbb{C}[X]^{n-1}$ und $C \in \mathbb{C}[X]^{(n-1)\times(n-1)}$ hermitesch. Es muss $a \neq 0$ gelten, denn sonst wäre $b = 0$ und somit $\det(A) = 0$, was im Widerspruch zur Voraussetzung des dritten Falles stünde. Wegen 3.14 gilt

$$a^n \det(aC - bb^*) = a^{2n-2} \det(A) \neq 0$$

   und somit auch $\det(aC - bb^*) \neq 0$. Es ist nach 3.14 wieder $aC - bb^*$ positiv semidefinit (Lemma 3.14 sagt, dass $(aC - bb^*)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv semidefinit ist), also gibt es nach Induktionsvoraussetzung $S \in \mathbb{C}[X]^{(n-1)\times(n-1)}$ mit $aC - bb^* = S^*S$

und derart, dass $\det(S)$ nur Nullstellen mit nichtnegativem Imaginärteil besitzt. Definiere

$$N := \begin{pmatrix} a & b^* \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $aA = N^*N$ und man kann wegen $a(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ Korollar 3.12 anwenden und erhält $Q \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $A = Q^*Q$, sowie $P \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ mit $N = PQ$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass alle Nullstellen von $\det(Q)$ nichtnegativen Imaginärteil haben. Sei $x \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\det(Q)$. Wegen $A = Q^*Q$ gilt somit auch $(\det A)(x) = 0$. Da also x eine Nullstelle von $\det(A)$ ist, ist x keine Nullstelle von v^*Av (siehe Voraussetzung von Fall 3). Also folgt somit $a(x) = (e_1^*Ae_1)(x) = (v^*Av)(x) \neq 0$. Weiter gilt

$$(\det P)(\det Q) = \det(PQ) = \det(N) = a\det(S).$$

Es gilt somit $a(x)(\det S)(x) = 0$. Wegen $a(x) \neq 0$ ist $(\det S)(x) = 0$ und x hat nach der Wahl von S nichtnegativen Imaginärteil.

Nach Lemma 3.21 sind somit alle Möglichkeiten abgedeckt. □

Folgende Bemerkung greift nur, wenn man mit den reellen Zahlen effektiv beziehungsweise maschinell rechnen kann, was natürlich Unsinn ist. Denn man kann mit keiner Maschine jede der überabzählbaren reellen Zahlen darstellen. Also nehme in folgender Bemerkung an, dass man in den reellen Zahlen rechnen könne.

Bemerkung 3.25. Obiger Satz 3.24 kann natürlich numerisch implementiert werden. Im Allgemeinen kann man den im Beweis beschriebenen Algorithmus jedoch nicht exakt ausführen, da man in Fall 1 eine gemeinsame Nullstelle der Einträge von A berechnen muss und da man für den Induktionsanfang (vergleiche 3.13) auch Nullstellen eines Polynoms ausrechnen muss. Dies ist natürlich im Allgemeinen für Polynome großen Grades (≥ 5) nicht möglich. Weiter muss man beachten, dass man um Korollar 3.12 anzuwenden, auch Nullstellen ausrechnen muss, da man Lemma 3.11 iterieren muss.

Der Leser möge sich von folgendem Beispiel nicht abschrecken lassen, denn es wird in Beispiel 6.5 wieder aufgegriffen. Dort wird dann gezeigt, wie Determinantendarstellungen von rein reellen Polynomen von Grad 2 aussehen.

Beispiel 3.26. Sei
$$H = \begin{pmatrix} 2 & -p_1 \\ -p_1 & p_1^2 - 2p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[X]^{2\times 2},$$
wobei $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[X]$ mit $(\det H)(x) = p_1^2(x) - 4p_2(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und gelte $\det(H) \neq 0$. Also ist H positiv semidefinit. Es gibt natürlich kein $z \in \mathbb{C}$ mit $H(z) = 0$. Also muss Fall 3 des Beweises von Satz 3.24 betrachtet werden. Es gilt $e_1^* H e_1 = 2$, also haben $e_1^* H e_1$ und $\det(H)$ keine gemeinsamen Nullstellen. Als nächstes muss man $2(p_1^2 - 2p_2) - p_1 p_1^* = p_1^2 - 4p_2 = \det(H)$ faktorisieren. Wähle also $f \in \mathbb{C}[X]$ mit $\det(H) = f^* f$. Dann gilt
$$2H = \begin{pmatrix} 2 & -p_1 \\ 0 & f \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 2 & -p_1 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$
Hier wird nicht Korollar 3.12 benötigt, da „Normieren“ genügt:
$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} p_1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} f \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} p_1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} f \end{pmatrix}.$$

4 Matrizen über dem Körper der rationalen Funktionen

Ziel dieses Kapitels ist es, ein hinreichendes Kriterium dafür zu liefern, wann eine Matrix über $\mathbb{C}(X)$ ein Matrixpolynom (also in $\mathbb{C}[X]^{n\times n}$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$) ist.

Notation 4.1. Notiere mit $\|\cdot\|$ die Operatornorm, also

$$\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R},\ A \mapsto \sup\{\|Ax\|_2 \mid x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad (A \in \mathbb{C}^{n\times n}),$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$ ist und das Supremum in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ genommen wird.

Erinnerung 4.2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix. Dann gilt

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A\} \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

wobei das Supremum in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ genommen wird.

Proposition 4.3. Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in \mathbb{C}$ konvergente Folge komplexer Zahlen und $A \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ ein Matrixpolynom. Dann gilt $\|A(x_m) - A(x)\| \to 0$ für $m \to \infty$, also $(A(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A(x)$ bezüglich der von $\|\cdot\|$ induzierten Metrik.

Beweis. Die Aussage folgt direkt, da die Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n},\ y \mapsto A(y) \qquad (y \in \mathbb{C})$$

stetig ist ($\mathbb{C}^{n\times n}$ wird mit der von $\|\cdot\|$ induzierten Metrik zu einem metrischen Raum). $\square$

Definition 4.4. Seien $M \in \mathbb{C}(X)^{n\times n} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ und $A \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ derart, dass $M = \frac{1}{p}A$ und 1 der größte gemeinsame Teiler (in $\mathbb{C}[X]$) der Einträge der Matrix A und von p ist. Also ist für $A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$

$$(\{a_{i,j} \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \{p\}) = (1) = \mathbb{C}[X].$$

Dann heißt $\alpha \in \mathbb{C}$ *Polstelle* von M, falls $p(\alpha) = 0$ gilt.

Beispiel 4.5. Sei $M = \begin{pmatrix} X & \frac{X^2+X}{X} \\ \frac{X}{X^2-X} & 0 \end{pmatrix}$.
Dann kann man zwar

$$M = \frac{1}{X^2 - X} \begin{pmatrix} X(X^2 - X) & (X^2 + X)(X - 1) \\ X & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben, jedoch ist 0 keine Polstelle von M, da

$$M = \begin{pmatrix} X & \frac{X+1}{1} \\ \frac{1}{X-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{X - 1} \begin{pmatrix} X(X - 1) & (X + 1)(X - 1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und da 0 natürlich keine Nullstelle von $X - 1$ ist. Aber 1 ist eine Polstelle, da 1 eine Nullstelle von $X - 1$ ist und da $(X - 1, X(X - 1), (X + 1)(X - 1), 1, 0) = (1)$.

Notation 4.6. Schreibe für $M \in \mathbb{C}(X)^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{C}$, welches keine Polstelle von M ist, $M(x)$ für die Matrix die entsteht, wenn x in die Einträge von M in den Nenner und den Zähler eingesetzt wird.

Beispiel 4.7. Also für $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{X} & \frac{X}{X^2-1} \\ X - 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $x = 2$ gilt dann

$$M(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{2^2-1} \\ 2 - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oder für obiges Beispiel 4.5 gilt dann

$$M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 + 1 \\ \frac{1}{0-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechenregel 4.8. Seien $A, B \in \mathbb{C}(X)^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{C}$ keine Polstelle von A und auch keine von B. Dann gelten folgende Rechenregeln:

- Falls $\det(A) \neq 0$ und x keine Polstelle von A^{-1} ist, so ist $A^{-1}(x) = A(x)^{-1}$.
- $(AB)(x) = A(x)B(x)$

Beweis. Schreibe $A = \frac{1}{p}M$ und $B = \frac{1}{q}N$ mit $p, q \in \mathbb{C}[X]$, $M, N \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ und $p(x) \neq$

$0 \neq q(x)$. Es gilt

$$(AB)(x) = \left(\frac{1}{pq}MN\right)(x) = \frac{1}{(pq)(x)}(MN)(x) = \frac{1}{p(x)}M(x)\frac{1}{q(x)}N(x) = A(x)B(x).$$

Weiter gilt $A(x)A^{-1}(x) = (AA^{-1})(x) = I_n(x) = I_n$, falls $\det(A) \neq 0$ und x keine Polstelle von A^{-1} ist, also ist $A(x)^{-1} = A^{-1}(x)$. $\square$

Erinnerung 4.9. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{com}(A))^T,$$

wobei $\mathrm{com}(A)$ die Komatrix von A ist (deren Einträge $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ sind (wobei $A_{i,j} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix ist die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht ist)).

Bemerkung 4.10. Seien $A, B \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ Matrixpolynome und gelte $\det(A) \neq 0$. Dann sind die Polstellen von $A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{com}(A))^T B \quad (\in \mathbb{C}(X)^{n\times n})$ alles Nullstellen von $\det(A)$ (aber nicht notwendigerweise umgekehrt).

Erinnerung 4.11. Eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *bestimmt divergent*, falls sie den „Grenzwert“ $+\infty$ oder $-\infty$ hat.

Das folgende Lemma ist aus einem Gespräch mit Markus Schweighofer entstanden.

Lemma 4.12 ([SCH2])**.** Sei $M \in \mathbb{C}(X)^{n\times n}$ eine Matrix über dem Körper der rationalen Funktionen. Sei $a \in \mathbb{C}$ eine Polstelle von M. Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, die gegen a konvergiert und derart, dass keines der x_m eine Polstelle von M ist. Dann divergiert die Folge $(\|M(x_m)\|)_{m\in\mathbb{N}}$ bestimmt.

Beweis. Wähle $p \in \mathbb{C}[X]$ und $A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ so, dass $M = \frac{1}{p}A$ und $I := (\{p\} \cup \{a_{i,j} \mid i,j \in \{1,\ldots,n\}\}) = (1)$. Da a eine Polstelle ist, gilt also $p(a) = 0$ und es gibt $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ mit $a_{i,j}(a) \neq 0$, da sonst $(X-a)$ ein gemeinsamer Teiler von p und den Einträgen von A wäre, also $I \subseteq (X-a) \subsetneq (1)$. Also gilt insbesondere

$$A(a) \neq 0. \tag{$*$}$$

Es ist somit $\|A(a)\| \neq 0$ und $|\,\|A(x_m)\| - \|A(a)\|\,| \overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} \|A(x_m) - A(a)\| \overset{4.3}{\to} 0$ für $m \to \infty$. Also konvergiert $(\|A(x_m)\|)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $\|A(a)\| \neq 0$ und $\|A(a)\|$ ist der einzige Häufungspunkt von $(\|A(x_m)\|)_{m\in\mathbb{N}}$.

Insbesondere ist 0 kein Häufungspunkt von $(\|A(x_m)\|)_{m\in\mathbb{N}}$. Somit gibt es ein $C > 0$ (z.B. $C := \frac{1}{2}\|A(a)\| > 0$) und ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \geq N$

$$\|A(x_m)\| \geq C.$$

Also gilt für $m \geq N$

$$\begin{aligned} \|M(x_m)\| &= \left|\frac{1}{p(x_m)}\right| \|A(x_m)\| \\ &\geq \left|\frac{1}{p(x_m)}\right| C. \end{aligned}$$

Letzteres divergiert bestimmt für $m \to \infty$ (also hat den „Grenzwert“ $+\infty$) und somit divergiert auch $(\|M(x_m)\|)_{m\in\mathbb{N}}$ bestimmt. □

Folgendes Lemma geht wohl auf Cauchy [C] zurück (habe das Buch nirgendwo (umsonst) gefunden, es jedoch trotzdem mal mit angegeben).

Lemma 4.13 (Cauchy [WIK1])**.** Sei $p = X^n + p_1X^{n-1} + \ldots + p_n \in \mathbb{C}[X]$ $(p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C})$ normiert und $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Dann gilt

$$|\alpha| \leq 1 + \max\{|p_1|, \ldots, |p_n|\}.$$

Beweis. Gelte Œ $|\alpha| > 1$. Aus $0 = p(\alpha) = \alpha^n + p_1\alpha^{n-1} + \ldots + p_n$ folgt

$$\begin{aligned} |\alpha|^n &= |\alpha^n| \\ &= |-(p_1\alpha^{n-1} + \ldots + p_n)| \\ &= |p_1\alpha^{n-1} + \ldots + p_n| \\ &\leq |p_1\alpha^{n-1}| + \ldots + |p_n| \\ &\leq \max\{|p_1|, \ldots, |p_n|\} \cdot (|\alpha^{n-1}| + \ldots + |\alpha| + 1) \\ &= \max\{|p_1|, \ldots, |p_n|\} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} |\alpha|^i}_{\text{geom. Summe}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\{|p_1|, \ldots, |p_n|\} \cdot \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} \\
&\leq \max\{|p_1|, \ldots, |p_n|\} \cdot \frac{|\alpha|^n}{|\alpha| - 1}.
\end{aligned}
$$

Durch Kürzen und Umstellen erhält man

$$
\begin{aligned}
1 \leq \max\{|p_1|, \ldots, |p_n|\} \cdot \frac{1}{|\alpha| - 1} &\iff |\alpha| - 1 \leq \max\{|p_1|, \ldots, |p_n|\} \\
&\iff |\alpha| \leq 1 + \max\{|p_1|, \ldots, |p_n|\}.
\end{aligned}
$$

□

Notation 4.14. Notiere mit $\|\cdot\|$ folgende Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]_n$

$$
\|\cdot\| : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \max\{|a_i| \mid i \in \{0, \ldots, n\}\} \qquad (a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}).
$$

Korollar 4.15 ist eine einfache Beobachtung des Autors und eine direkte Folgerung von 4.13.

Korollar 4.15. Sei $P \subseteq \mathbb{R}[X]_n$ eine Menge normierter und durch die Norm $\|\cdot\|$ beschränkter Polynome vom Grad kleiner gleich n. Dann ist auch die Nullstellenmenge $N := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \exists p \in P : p(\alpha) = 0\}$ beschränkt.

Beweis. Sei $C > 1$ eine obere Schranke von P (also $\|p\| \leq C$ für alle $p \in P$). Sei $\alpha \in N$. Wähle $p \in P$ mit $p(\alpha) = 0$. Schreibe $p = X^d + p_1 X^{d-1} + \ldots + p_d$, wobei $p_1, \ldots, p_d \in \mathbb{R}$ und $d = \deg(p) \leq n$ der Grad von p ist. Es gilt mit Lemma 4.13 und mit der Definition der Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}[X]_n$

$$
|\alpha| \leq 1 + \max\{|p_1|, \ldots, |p_d|\} \leq 1 + \|p\| \leq \|p\| + \|p\| \leq 2C.
$$

Also ist die Nullstellenmenge N durch $2C$ beschränkt. □

Das nächste Lemma ist ein Sammelsurium verschiedener Eigenschaften, die sehr stark auf den Beweis des Satzes von Helton und Vinnikov zurechtgeschnitten worden sind. Es stammt vom Autor selbst, basiert aber auf Ergebnissen aus 4.12 und 2.16 also auf [SCH2] und [GKVW].

Lemma 4.16. Sei $M \in \mathbb{C}(X)^{n \times n}$ eine Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}(X)$ und gelte für das charakteristische Polynom $p := \chi_M = \det(TI_n - M) \in \mathbb{R}[T, X]$ mit $\deg(p) = n$, also dass die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms in $\mathbb{R}[X]$ statt in $\mathbb{C}(X)$ liegen. Seien alle Polstellen von M reell und gelte für alle $x \in \mathbb{R}$, die keine Polstellen von M sind, dass $M(x)$ hermitesch ist, also $M(x) = M(x)^*$.

Dann ist $M \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ ein lineares hermitesches Matrixpolynom (also dann gibt es keine Polstellen).

Beweis. Damit M ein Matrixpolynom ist, genügt es zu zeigen, dass M keine Polstellen besitzt. Schreibe $M = \frac{1}{q}A$ mit $q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ und $A \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) = 0$. Damit M ein Matrixpolynom ist, genügt es zu zeigen, dass x keine Polstelle ist. Es gibt eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $x_m \to x$ für $m \to \infty$ und so, dass $q(x_m) \neq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt (dies geht wegen $q \neq 0$). Also sind die x_m insbesondere keine Polstellen von M und $M(x_m)$ ist nach Voraussetzung hermitesch. Da $M(x_m)$ hermitesch ist, gilt $\|M(x_m)\| = |\alpha_m|$, wobei $\alpha_m \in \mathbb{R}$ nach 4.2 die betragsmäßig größte Nullstelle von $\chi_{M(x_m)} = \chi_M(T, x_m) = p(T, x_m) \in \mathbb{R}[T]$ ist. Da $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist, ist sie natürlich auch beschränkt und somit ist auch die Menge $\{p(T, x_m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ aus 4.15 beschränkt. Mit Korollar 4.15 ist dann $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \exists m \in \mathbb{N} : p(\alpha, x_m) = 0\}$ beschränkt und somit natürlich auch

$$\{\|M(x_m)\| \mid m \in \mathbb{N}\} = \{|\alpha_m| \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq \{|\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{C},\ \exists m \in \mathbb{N} : p(\alpha, x_m) = 0\}.$$

Die Folge $(\|M(x_m)\|)_{m\in\mathbb{N}}$ divergiert also nicht bestimmt. Mit Lemma 4.12 bedeutet dies, dass x keine Polstelle war. Also ist $M \in \mathbb{C}[X]^{n\times n}$ wie gewünscht ein Matrixpolynom.

Dass es hermitesch ist, folgt direkt aus $M(x) = M(x)^* = M^*(x^*) = M^*(x)$ für alle (nicht-Polstellen) $x \in \mathbb{R}$ und aus 2.4. Die Linearität folgt direkt aus 2.16 und aus $\deg(p) = n$. □

5 Hermite-Matrizen

In diesem Kapitel werden einige Fakten über Begleit- und Hermite-Matrizen von Polynomen festgehalten, die bei der Konstruktion einer Determinantendarstellung eines rein reellen Polynoms helfen.

Definition 5.1. Sei R ein Ring und $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in R[X]$ ein normiertes Polynom mit Koeffizienten in R. Definiere die *Begleitmatrix von* p durch

$$C_p := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in R^{n\times n}$$

Erinnerung 5.2. Sei R ein Ring und $p \in R[X]$ normiert vom Grad d. Dann gilt $p = \det(XI_d - C_p) = \chi_{C_p}$.

Erinnerung 5.3. Sei $p \in \mathbb{R}[X]$ normiert und $d := \deg(p)$. Dann ist die Begleitmatrix C_p die Darstellungsmatrix des $\mathbb{R}$-Vektorraumendomorphismus

$$\mathbb{R}[X]/(p) \to \mathbb{R}[X]/(p), \quad \overline{f} \mapsto \overline{Xf} \qquad (f \in \mathbb{R}[X])$$

bezüglich der Basis $(\overline{1}, \ldots, \overline{X^{d-1}})$.

Folgende Konstruktion basiert auf der Idee von [SCH3]. Es ist lohnenswert, parallel zu der Konstruktion (ab hier bis 5.10) die Diskussion am Anfang von Kapitel 6 zu lesen, um die Konstruktion in den Kontext zum Finden einer Determinantendarstellung eines univariaten rein reellen Polynoms einzuordnen. Man kann aber auch einfach die Konstruktion hinnehmen und versteht dann eben erst am Anfang von Kapitel 6 den Zweck dieser Konstruktion.

Proposition 5.4 ([SCH3])**.** Sei $p = \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i) \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad d, normiert und $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ die Nullstellen von p (gezählt mit Vielfachheiten).
Dann ist die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{R}[X]/(p)) \times (\mathbb{R}[X]/(p)) \to \mathbb{R}, \quad (\overline{f}, \overline{g}) \mapsto \sum_{i=1}^{d} f(\alpha_i)g(\alpha_i) \qquad (f, g \in \mathbb{R}[X])$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]/(p)$, falls die Nullstellen von p einfach sind und sonst eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]/(p)$.

Beweis. Wohldefiniertheit: Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{R}[X]$ mit $f_1 - f_2, g_1 - g_2 \in (p)$. Wähle $q_1, q_2 \in \mathbb{R}[X]$ mit $f_1 - f_2 = q_1 p$ und $g_1 - g_2 = q_2 p$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \overline{f_2}, \overline{g_2} \rangle &= \sum_{i=1}^{d} f_2(\alpha_i) g_2(\alpha_i) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \underbrace{(f_2(\alpha_i) + q_1(\alpha_i) \overbrace{p(\alpha_i)}^{=0})}_{=f_1(\alpha_i)} \underbrace{(g_2(\alpha_i) + q_2(\alpha_i) \overbrace{p(\alpha_i)}^{=0})}_{=g_1(\alpha_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{d} f_1(\alpha_i) g_1(\alpha_i) \\
&= \langle \overline{f_1}, \overline{g_1} \rangle.
\end{aligned}$$

Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wohldefiniert.
Bilinearität: Klar, da die Auswertung im Punkt α_i linear ist.
Positivdefinitheit: Sei $f \in \mathbb{R}[X]$. Es gilt

$$\langle \overline{f}, \overline{f} \rangle = \sum_{i=1}^{d} (f(\alpha_i))^2 \geq 0.$$

Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ schonmal positiv semidefinit.
Seien nun die Nullstellen von p alle einfach und gelte

$$0 = \langle \overline{f}, \overline{f} \rangle = \sum_{i=1}^{d} (f(\alpha_i))^2.$$

Hieraus folgt $f(\alpha_1) = \ldots = f(\alpha_d) = 0$.

Da die Nullstellen von p einfach sind, muss $f \in (p)$ sein, was natürlich $\overline{f} = \overline{0}$ bedeutet. Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit, falls p nur einfache Nullstellen besitzt. □

Korollar 5.5 ([SCH3])**.** Sei $p \in \mathbb{R}[X]$ normiert und habe ausschließlich reelle Nullstellen. Bezeichne mit φ den Vektorraumendomorphismus aus 5.3 und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Bilinearform aus 5.4. Dann gilt

$$\forall f, g \in \mathbb{R}[X] : \langle \varphi(\overline{f}), \overline{g} \rangle = \langle \overline{f}, \varphi(\overline{g}) \rangle.$$

Diese Eigenschaft wird im Folgenden *selbstadjungiert* genannt.

Beweis. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ die Nullstellen von p (mit Vielfachheiten gezählt). Seien $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Es gilt

$$\langle \overline{f}, \varphi(\overline{g}) \rangle = \langle \overline{f}, \overline{Xg} \rangle = \sum_{i=1}^{d} f(\alpha_i)\alpha_i g(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i f(\alpha_i) g(\alpha_i) = \langle \overline{Xf}, \overline{g} \rangle = \langle \varphi(\overline{f}), \overline{g} \rangle.$$

Also ist φ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ selbstadjungiert. □

Definition 5.6 ([RAG] 1.6.2 & 1.6.3)**.** Sei R ein Ring und $p \in R[X]$ ein normiertes Polynom. Dann heißt die Matrix $H_p := (\operatorname{tr}(C_p^{i+j-2}))_{i,j \in \{1,\ldots,d\}} \in SR^{d \times d}$ *Hermite-Matrix* von p, wobei $d = \deg(p)$ und C_p die Begleitmatrix von p ist.

Proposition 5.7 ([RAG] 1.6.1 (i))**.** Sei $p \in \mathbb{C}[X]$ normiert vom Grad d. Dann gilt für die Hermite-Matrix von p

$$H_p = (\operatorname{tr}(C_p^{i+j-2}))_{i,j \in \{1,\ldots,d\}} = \left(\sum_{k=1}^{d} \alpha_k^{i+j-2} \right)_{i,j \in \{1,\ldots,d\}},$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von p (mit Vielfachheit gezählt) sind.

Beweis. Da p über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, ist C_p über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar. Wähle also eine (obere) Dreiecksmatrix $D \in \mathbb{C}^{d \times d}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{d \times d}$ mit $S^{-1}DS = C_p$. Auf der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte von C_p, also die Nullstellen von p. Weiter gilt $C_p^i = S^{-1}D^iS$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
Also gilt insgesamt für alle $i \in \mathbb{N}_0$

$$\operatorname{tr}(C_p^i) = \operatorname{tr}(S^{-1}D^iS) = \operatorname{tr}(D^i) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k^i.$$

□

Lemma 5.8 ([RAG] 1.6.1(d) & 1.6.4)**.** Vergleiche 5.7 sowie 5.4.
Sei $p \in \mathbb{R}[X]$ normiert vom Grad d und habe nur reelle Nullstellen. Dann ist die Hermite-Matrix von p die Darstellungsmatrix der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus 5.4 bezüglich der Basis $(\overline{1}, \dots, \overline{X^{d-1}})$.

Beweis. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ die Nullstellen von p und $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Betrachte also die Basiselemente $\overline{X^{i-1}}$ und $\overline{X^{j-1}}$. Es gilt

$$\langle \overline{X^{i-1}}, \overline{X^{j-1}} \rangle = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k^{i-1} \alpha_k^{j-1} = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k^{i+j-2}.$$

Also ist $H_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{d} \alpha_k^{i+j-2} \right)_{i,j \in \{1,\dots,d\}}$ die Darstellungsmatrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich $(\overline{1}, \dots, \overline{X^{d-1}})$. □

Bemerkung 5.9. Da in der Situation von 5.8 das Skalarprodukt natürlich positiv definit ist, ist die Hermite-Matrix somit auch positiv definit, falls das Polynom nur einfache reelle Nullstellen besitzt und andernfalls positiv semidefinit.

Lemma 5.10 ([SCH3])**.** Sei wieder $p \in \mathbb{R}[X]$ normiert mit nur reellen Nullstellen. Dann gilt für die Begleitmatrix C und Hermite-Matrix H von p

$$C^T H = HC.$$

Beweis. Sei wieder φ der Vektorraumendomorphismus aus 5.3, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Bilinearform aus 5.4 und d der Grad von p. Seien $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Es genügt $e_i^T C^T H e_j = e_i^T H C e_j$ zu zeigen, wobei e_i beziehungsweise e_j den i-te beziehungsweise j-te kanonischen Einheitsvektor des $\mathbb{R}^d$ bezeichne. Da φ nach 5.5 bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ selbstadjungiert ist, gilt wie gewünscht

$$e_i^T C^T H e_j = (Ce_i)^T H e_j = \langle \varphi(\overline{X^{i-1}}), \overline{X^{j-1}} \rangle = \langle \overline{X^{i-1}}, \varphi(\overline{X^{j-1}}) \rangle = e_i^T H C e_j.$$

□

Folgendes Korollar ist eine sehr einfache und direkte Konsequenz von Lemma 5.10 und wurde in [GKVW] ohne Beweis verwendet.

Korollar 5.11. Sei $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ rein reell mit $p(0) = 1$ und $d := \deg(p)$. Sei $q := T^d p\left(\frac{1}{T}, \frac{Y}{T}\right) \in \mathbb{R}[T, Y]$. Dann gilt für die Hermite-Matrix H und die Begleitmatrix C von

q (wobei q als Polynom in der Unbekannten T und mit Koeffizienten in $\mathbb{R}[Y]$ aufgefasst wird)

$$C^T H = HC.$$

Beweis. Folgt direkt aus Bemerkung 2.4 und Lemma 5.10, da $q(T, y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ normiert ist und nur reelle Nullstellen besitzt. □

Definition 5.12. Sei $p = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_d) \in \mathbb{C}[X]$ ein normiertes univariates Polynom ($\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$). Dann heißt $\operatorname{disc}(p) := \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ die *Diskriminante* von p.

Erinnerung 5.13. Da die Diskriminante $\operatorname{disc}(p)$ symmetrisch in den Nullstellen von p ist, ist auch $\operatorname{disc}(p) \in \mathbb{R}$, falls $p \in \mathbb{R}[X]$. Außerdem gilt für die Determinante der Vandermondematrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{d-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \cdots & \alpha_d^{d-1} \end{pmatrix},$$

dass $\det(V) = \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)$ und somit auch

$$\operatorname{disc}(p) = \det(V)^2 = \det(V^T V).$$

Außerdem besitzt p natürlich genau dann eine mehrfache Nullstelle (in $\mathbb{C}$), wenn $\operatorname{disc}(p) = 0$ gilt.

Der Beweis des ersten Teils des folgenden Lemmas stammt aus [SCH3] und der zweite Teil ist eine einfache Folgerung aus 5.7.

Lemma 5.14 ([SCH3])**.** Sei $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ rein reell mit $p(0) = 1$ und $d := \deg(p)$. Sei $q := T^d p\left(\frac{1}{T}, \frac{Y}{T}\right) \in \mathbb{R}[T, Y]$. Dann ist die Hermite-Matrix H von q (wobei q als Polynom in der Unbekannten T und mit Koeffizienten in $\mathbb{R}[Y]$ aufgefasst wird) positiv semidefinit. Weiter ist $\det(H(y))$ die Diskriminante von $q(T, y) \in \mathbb{R}[Y]$ für alle $y \in \mathbb{R}$, was auch gilt, wenn p nicht rein reell ist.

Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist, dass $H(y)$ positiv semidefinit ist. Dies folgt allerdings sofort aus Bemerkung 5.9, beachte hierbei $H_{q(T,y)} = H_q(y) = H(y)$ und dass $q(T, y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ nur reelle Nullstellen besitzt.

Nun zur Diskriminante:

Schreibe $q(T, y) = (T - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (T - \alpha_d)$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$. Sei

$$V := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{d-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_d^{d-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d \times d}.$$

Mit 5.7 folgt

$$H(y) = (\operatorname{tr}(C_{q(T,y)}^{i+j-2}))_{i,j \in \{1,\ldots,d\}} = \left(\sum_{k=1}^{d} \alpha_k^{i+j-2} \right)_{i,j \in \{1,\ldots,d\}} = V^T V.$$

Somit gilt

$$\det(H) = \det(V)^2 = \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = \operatorname{disc}(q(T, y)).$$

□

Mit Hermite-Matrizen kann man außerdem prüfen, ob ein Polynom in $\mathbb{R}[X, Y]$ rein reell ist, denn die Umkehrung des ersten Teils des obigen Lemmas 5.14 gilt auch, wird aber hier nicht ausgeführt, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Vergleiche dazu [RAG] Korollar 1.6.6. Dazu muss man auch noch die Charakterisierung, dass eine symmetrische Matrix genau dann positiv semidefinit ist, wenn die Signatur gleich dem Rang der Matrix ist verwenden. Hierbei meint Signatur die Anzahl der positiven Eigenwerte minus die Anzahl der negativen Eigenwerte.

Definition 5.15. Sei K ein Körper und $p \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom vom Grad $d \in \mathbb{N}$. Dann heißt p *quadratfrei* in $K[X_1, \ldots, X_n]$, falls es kein $q \in K[X_1, \ldots, X_n] \setminus K$ mit $q^2 \mid p$ gibt oder äquivalent, falls in der Primfaktorzerlegung von p kein Primfaktor doppelt vorkommt (beachte, dass $K[X_1, \ldots, X_n]$ faktoriell ist).

Notation 5.16. Sei K ein Körper und sei $p = a_d T^d + \ldots + a_1 T + a_0 \in K[T, Y] \setminus \{0\}$ ein Polynom ($a_0, \ldots, a_d \in K[Y]$). Notiere dann die Ableitung von p nach der Unbekannten T mit

$$\partial_T p = d a_d T^{d-1} + \ldots + 2 a_2 T + a_1 \in K[T, Y].$$

Setzt natürlich $\partial_T 0 := 0$.

Notation 5.17. Sei K ein Körper und sei $p = a_d T^d + \ldots + a_1 T + a_0 \in K[T, Y] \setminus \{0\}$ ein Polynom ($a_0, \ldots, a_d \in K[Y]$) mit $a_d \neq 0$. Schreibe dann $\deg_T(p) = d$ für den Grad von p in T. Setze $\deg(0) := -\infty$.

Lemma 5.18 ([SCH1])**.** Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Körper und sei $q = T^d + q_{d-1}T^{d-1} + \ldots + q_0 \in K[T, Y]$ $(q_0, \ldots, q_{d-1} \in K[Y],\ d \in \mathbb{N})$. Ist q quadratfrei in $K[T, Y]$, so gilt $\det(H) \neq 0$, wobei $H \in K[Y]^{d\times d}$ die Hermite-Matrix von q ist. q wird hierbei als (normiertes) Polynom in der Unbekannten T und mit Koeffizienten in $K[Y]$ aufgefasst.

Beweis. Kontraposition: Gelte also $\det(H) = 0$. Also gilt nach Lemma 5.14, dass $q(T, y) \in K[T]$ für alle $y \in K$ eine doppelte Nullstelle besitzt. Betrachte nun die Ableitung von q nach T $p := \partial_T q \in K[T, Y]$. Da $q(T, y)$ eine doppelte Nullstelle besitzt, haben also $p(T, y)$ und $q(T, y)$ eine gemeinsame Nullstelle $\alpha_y \in \mathbb{C}$, welche natürlich von $y \in K$ abhängt. Ziel ist es, ein Polynom $r \in K[T, Y] \setminus K$ zu finden, welches p und q teilt. Schreibe dazu $p = p_{d-1}T^{d-1} + \ldots + p_0$, wobei $p_0, \ldots, p_{d-1} \in K[Y]$ und setze $q_d = 1$. Betrachte nun die Sylvestermatrix

$$S = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_d & & & \\ & q_0 & q_1 & \cdots & q_d & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & q_0 & q_1 & \cdots & q_d \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{d-1} & & & \\ & p_0 & p_1 & \cdots & p_{d-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & p_0 & p_1 & \cdots & p_{d-1} \end{pmatrix} \in K[Y]^{((d-1)+d)\times((d-1)+d)},$$

die aus $d-1$ (wie oben) verschobenen Zeilen $(q_0, \ldots, q_d)$ und d verschobenen Zeilen $(p_0, \ldots, p_{d-1})$ und sonst nur aus Nullen besteht. Zeige zuerst $\det(S) = 0$:

Sei $y \in K$. Hierzu reicht es $\det(S(y)) = 0$ zu zeigen (beachte, dass $\#K = \infty$). Definiere $w = (1, T, \ldots, T^{2d-2})^T$. Betrachte nun

$$Sw = (q, \ldots, T^{d-2}q, p, \ldots, T^{d-1}p)^T \tag{$*$}$$

und setze (α_y, y) ein und erhalte nach Wahl von α_y

$$S(y)(1, \alpha_y, \ldots, \alpha_y^{2d-2})^T = (q(\alpha_y, y), \ldots, \alpha_y^{d-2}q(\alpha_y, y), p(\alpha_y, y), \ldots, \alpha_y^{d-1}p(\alpha_y, y))^T \quad = 0.$$

Da $(1, \alpha_y, \ldots, \alpha_y^{2d-2})^T \neq 0$ gilt, hat $S(y)$ einen nichttrivialen Kern und somit gilt $\det(S(y)) = 0$. Da $y \in K$ beliebig war, gilt $\det(S) = 0$. Finde nun einen gemeinsamen Teiler von p und q.

S ist als Matrix über $K(Y)$ nicht invertierbar. Wähle nun $f_1, \ldots, f_{d-1}, g_1, \ldots, g_d \in K[Y]$ mit $(f_1, \ldots, f_{d-1}, g_1, \ldots, g_d)S = 0$ (eigentlich gibt es nur $f_1, \ldots, f_{d-1}, g_1, \ldots, g_d \in K(Y)$, aber man kann dann die Gleichung mit einem Hauptnenner multiplizieren). Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 &= (f_1, \ldots, f_{d-1}, g_1, \ldots, g_d)Sw \\ &\overset{(*)}{=} (f_1, \ldots, f_{d-1}, g_1, \ldots, g_d)(q, \ldots, T^{d-2}q, p, \ldots, T^{d-1}p)^T \\ &= q \underbrace{\sum_{i=1}^{d-1} f_i T^{i-1}}_{=:f} + p \underbrace{\sum_{j=1}^{d} g_j T^{j-1}}_{=:g} . \end{aligned}$$

Also gilt $0 = qf + pg$ und somit $qf = -pg$. Weiter ist der Grad von g in T gleich $d-1$ und somit kleiner als der Grad von q in T, also in Zeichen $\deg_T(g) = d-1 < d = \deg_T(q)$. Also teilt insbesondere q nicht g. Wegen $q \nmid g$ und da $K[T,Y]$ faktoriell ist, gibt es ein irreduzibles $r \in K[T,Y]$ mit $r \mid q$ und $r \nmid g$. Also gilt auch $r \mid p$, da $qf = -pg$. Es bleibt $r^2 \mid q$ zu zeigen.

Wähle $h \in K[Y]$ mit $q = rh$. Dann gilt $p = \partial_T q = (\partial_T r)h + r\partial_T h$. Weil $r\partial_T h$ und p Vielfaches von r sind, gilt auch $r \mid (\partial_T r)h$. Da r irreduzibel beziehungsweise prim ist, gilt somit $r \mid h$ ($r \nmid \partial_T r$, da $\deg_T(\partial_T r) < \deg_T(r)$). Insgesamt gilt also $r^2 \mid q = rh$, was natürlich bedeutet, dass q nicht quadratfrei ist. □

Lemma 8.2 in [SCH1] lieferte im obigen Beweis die Idee, die Sylvestermatrix zu betrachten. Die Methode die Sylvestermatrix mit genau diesem w zu multiplizieren und die Konstruktion von f und g stammen ebenso aus Lemma 8.2 in [SCH1] (wobei in diesem Schritt in [SCH1] p und q gleichzeitig homogenisiert werden). Der irreduzible Faktor r, der gefunden wird, stammt auch aus der gleichen Quelle. Der letzte Teil, der liefert, dass q doppelt von r geteilt wird, stammt vom Autor selbst.

Folgendes Lemma stammt vom Autor, ist aber nicht schwer zu sehen.

Lemma 5.19. Sei K ein Körper. Sei $p \in K[X,Y]$ quadratfrei mit $p(0) = 1$ und vom Grad $d \in \mathbb{N}$. Dann ist $q := T^d p\left(\frac{1}{T}, \frac{Y}{T}\right) \in K[T,Y]$ auch quadratfrei.

Beweis. Seien $f, g \in K[T,Y]$ mit $q = f^2 g$. Es ist $f \in K$ zu zeigen, dazu genügt es $\deg(g) = \deg(q) = d$ zu zeigen. Die zweite Gleichung ist klar, denn T^d ist ein Monom von

q, da 1 der konstante Koeffizient von p ist. Es gilt

$$\begin{aligned} p &= X^d q\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right) \\ &= \left(X^{\deg(f)} f\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right)\right)^2 X^{\deg(g)} g\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right) \end{aligned}$$

Da p quadratfrei ist, ist $X^{\deg(f)} f\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right)$ eine Einheit und es gilt

$$\deg(g) \geq \deg\left(X^{\deg(g)} g\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right)\right) = \deg(p) = d.$$

Da $\deg(g)$ höchstens d sein kann gilt oben Gleichheit. $\square$

Definition und Proposition 5.20. Sei K ein Körper und $p \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom mit $\deg(p) \geq 1$. Dann gibt es ein $a \in K$ und bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmte paarweise koprime $p_1, \ldots, p_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ (also für $i \neq j$ gilt $1 \in (p_i, p_j)$) die entweder gleich 1 oder quadratfrei sind derart, dass $p = ap_1^1 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_m^m$ und dass p_m quadratfrei ist. Man nennt diese Zerlegung *quadratfreie Zerlegung* von p (in $K[X_1, \ldots, X_n]$).

Beweis. Da $K[X_1, \ldots, X_n]$ faktoriell ist, gibt es eine bis auf Assoziiertheit eindeutige Primfaktorzerlegung von p. Wenn man die Primfaktoren geschickt ordnet kann man sie für ein $m \in \mathbb{N}$ folgendermaßen schreiben:

$$p = ap_{1,1}^1 \cdot \ldots \cdot p_{1,d_1}^1 \cdot \ldots \cdot p_{m,1}^m \cdot \ldots \cdot p_{m,d_m}^m$$

für ein $a \in K$ und gewisse paarweise nicht-assoziierte prime $p_{i,j} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, d_i\}$) und $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N}_0$. Diese Darstellung ist bis auf Assoziiertheit und Reihenfolge der $p_{i,j}$ für festes i eindeutig. Fasse nun folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} p_1 &:= p_{1,1} \cdot \ldots \cdot p_{1,d_1} \\ &\vdots \\ p_m &:= p_{m,1} \cdot \ldots \cdot p_{m,d_m}. \end{aligned}$$

Die p_i sind offensichtlich quadratfrei oder gleich 1, falls $d_i = 0$ ist. Außerdem gilt $p = ap_1^1 \cdot \ldots \cdot p_m^m$ $\square$

Bemerkung 5.21. Falls $K = \mathbb{Q}$ ist, so gibt es effiziente Algorithmen zum Bestimmen einer quadratfreien Zerlegung. Außerdem ist eine quadratfreie Zerlegung wesentlich einfacher zu berechnen als eine Primfaktorzerlegung.

Bemerkung 5.22. Sei K ein Körper und $p \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom vom Grad ≥ 1 mit $p(0) = 1$. Sei weiter $p = ap_1^1 \cdot \ldots \cdot p_m^m$ eine quadratfreie Zerlegung von p ($a \in K$ und p_i quadratfrei oder $= 1$). Durch „Normieren“ der p_i kann man Œ annehmen, dass $p_i(0) = 1$ gilt. Dann gilt auch $a = 1$, denn $1 = p(0) = aq_1(0) \cdot \ldots \cdot q_m^m(0) = a$. Also kann man bei der quadratfreien Zerlegung eines Polynoms p mit $p(0) = 1$ die Einheit vor dem Produkt der quadratfreien Polynome weglassen und diese mit konstantem Koeffizienten 1 wählen.

6 Der Satz von Helton und Vinnikov

Um eine Idee für den Beweis des Satzes von Helton und Vinnikov zu bekommen, wird zuerst der univariate Fall diskutiert, der auf [SCH3] basiert.

Sei also $p \in \mathbb{R}[X]$ mit nur reellen Nullstellen (also p rein reell nach Bemerkung 1.3) und $p(0) = 1$ und sei $d = \deg(p)$. Es ist eine hermitesche Matrix mit $p = \det(I_d + XA)$ gesucht (hier wird sogar eine symmetrische Matrix gefunden).

Dieses Problem kann man natürlich wie in der Einleitung schon angedeutet theoretisch ganz einfach lösen, wenn man die Nullstellen von p kennt, denn:

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ die Nullstellen von p mit Vielfachheit gezählt. Dann gilt

$$p = a(X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_d) = (-\alpha_1^{-1}X + 1) \cdot \ldots \cdot (-\alpha_d^{-1}X + 1),$$

wobei $a = (-1)^d(\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_d)^{-1}$ (beachte, dass 0 keine Nullstelle von p sein kann). Also gilt

$$p = \det \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1^{-1}X & & \\ & \ddots & \\ & & -\alpha_d^{-1}X \end{pmatrix} = \det \left(I_d + X \begin{pmatrix} -\alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 - \alpha_d^{-1} \end{pmatrix} \right).$$

Also besitzt p eine Determinantendarstellung.

Aber das Problem bei dieser „Konstruktion“ ist, dass man die Nullstellen von p (exakt) bestimmen muss, was natürlich für Polynome von großem Grad (≥ 5) im Allgemeinen nichtmehr machbar ist. Deshalb nun eine echte Konstruktion, die auch berechenbar ist und man lediglich Nullstellen von Polynomen zweiten Grades bestimmen muss (was natürlich kein Problem darstellt).

1. Œ p quadratfrei:
   Nehme ohne Einschränkung an, dass p nur einfache Nullstellen besitzt (also quadratfrei (in $\mathbb{R}[X]$) ist), sonst teile p durch den größten gemeinsamen Teiler von p und der Ableitung p' von p. Finde nun eine Determinantendarstellung zu dem Quo-

tienten (der in $\mathbb{R}[X]$ liegt und nun einfache Nullstellen besitzt) und zum größten gemeinsamen Teiler und „klebe“ mit 1.13 die Determinantendarstellungen zusammen (beachte, dass dies eventuell iteriert werden muss, da der größte gemeinsame Teiler nicht unbedingt einfache Nullstellen hat). Bestimme alternativ die quadratfreie Zerlegung von p und betrachte einen quadratfreien Faktor von p (dies kann mit Hilfe von Yuns Algorithmus bewerkstelligt werden: [WIK2] (geht wohl auf [Y] zurück)).

2. Hermite-Matrix faktorisieren:
   Sei $q := T^d p\left(\frac{1}{T}\right) \in \mathbb{R}[T]$ das sogenannte reziproke Polynom von p und $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Begleitmatrix von q (beachte, dass q normiert ist). Sei $H \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Hermite-Matrix von q (vergleiche 5.6). Nach Bemerkung 5.9 ist H positiv definit, da q nur einfache Nullstellen besitzt, denn die Nullstellen von q sind die Reziproken der Nullstellen von p. Nach 3.1 beziehungsweise mit der Cholesky-Zerlegung kann man $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $H = Q^T Q$ finden (hierbei muss man Nullstellen von Polynomen zweiten Grades bestimmen). Da H positiv definit ist, gilt $\det(H) \neq 0$ und somit auch $\det(Q) \neq 0$. Also ist Q invertierbar.

3. QCQ^{-1} ist symmetrisch:
   Nach 5.10 gilt $C^T H = HC$ und somit $C^T Q^T Q = Q^T QC$. Da Q invertierbar ist, folgt
   $$C^T Q^T = C^T Q^T Q Q^{-1} = Q^T Q C Q^{-1},$$
   woraus direkt
   $$(Q^T)^{-1} C^T Q^T = (Q^T)^{-1} Q^T Q C Q^{-1} = QCQ^{-1}$$
   folgt. Also gilt insgesamt
   $$(QCQ^{-1})^T = QCQ^{-1}$$
   und QCQ^{-1} ist symmetrisch.

4. Determinantendarstellung von p finden:
   Es gilt nun
   $$q = \det(TI_d - C) = \det(Q(TI_d - C)Q^{-1}) = \det(TI_d - QCQ^{-1})$$

und QCQ^{-1} ist symmetrisch. Außerdem gilt

$$p = X^d q\left(\frac{1}{X}\right) = X^d \det\left(\frac{1}{X} I_d - QCQ^{-1}\right) = \det(I_d - XQCQ^{-1}).$$

Somit ist also

$$p = \det(I_d - X(QCQ^{-1}))$$

eine symmetrische Determinantendarstellung von p.

Folgender Beweis des Satzes von Helton und Vinnikov, welcher auf [HV] zurückgeht, orientiert sich an dem Beweis aus [GKVW] (Theorem 4.1), benutzt aber die quadratfreie Zerlegung anstatt eine Approximation durch eine spezielle Klasse rein reeller Polynome (mit einer Glattheitsbedingung). Hierzu nach dem Beweis noch ein paar Unterschiede.

Satz 6.1 (Helton und Vinnikov)**.** Sei $p \in \mathbb{R}[X, Y]$. p ist genau dann rein reell, wenn p eine hermitesche Determinantendarstellung besitzt.

Beweis. Die Rückrichtung ist 1.9. Also nun zur Hinrichtung:

Sei p rein reell vom Grad d. Gelte Œ $d \geq 1$, da für $d = 0$

$$p = 1 = \det(())$$

gilt und die leere Matrix () hermitesch ist.

1. <u>Œ p quadratfrei:</u>
   Nach 5.20 kann man p als Produkt quadratfreier Polynome mit konstantem Koeffizienten 1 schreiben (beachte Bemerkung 5.22). Jeder dieser quadratfreien Faktoren ist dann nach 1.12 wieder rein reell. Wenn also zu jedem dieser quadratfreien (und rein reellen) Faktoren eine Determinantendarstellung gefunden wird, kann man mit 1.13 eine Determinantendarstellung von p durch „Zusammenkleben" der Determinantendarstellungen bekommen. Sei also nun Œ p quadratfrei.

2. <u>Hermite-Matrix faktorisieren:</u>
   Es muss wie in obiger Diskussion eine Art reziprokes Polynom betrachtet werden und dann dessen Hermite-Matrix faktorisiert werden.

   Sei $q := T^d p\left(\frac{1}{T}, \frac{Y}{T}\right) \in \mathbb{R}[T, Y]$. Sei $C \in \mathbb{R}[Y]^{d \times d}$ die Begleitmatrix von q aufgefasst als Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{R}[Y]$ und in der Unbekannten T. Da C die Begleitmatrix von q ist, gilt

   $$q = \det(TI_d - C).$$

Sei $H \in \mathbb{R}[Y]^{d\times d}$ die Hermite-Matrix von q (aufgefasst als Polynom in T und mit Koeffizienten in $\mathbb{R}[Y]$). Nach 5.14 ist dann H positiv semidefinit und kann mit 3.24 faktorisiert werden. Also erhält man $Q \in \mathbb{C}[Y]^{d\times d}$ mit

$$H = Q^*Q$$

und derart, dass $\det(Q)$ nur Nullstellen mit nichtnegativem Imaginärteil hat. Da p quadratfrei ist, ist mit Lemma 5.19 auch q quadratfrei und es gilt nach 5.18 $\det(H) \neq 0$ und somit auch

$$\det(Q) \neq 0.$$

Also ist Q in $\mathbb{C}(Y)^{d\times d}$ invertierbar.

Definiere

$$M := QCQ^{-1} \in \mathbb{C}(Y)^{d\times d}.$$

Es gilt

$$q = \det(TI_d - C) = \det(Q(TI_d - C)Q^{-1}) = \det(TI_d - QCQ^{-1}) = \det(TI_d - M).$$

Zeige nun noch, dass M ein lineares hermitesches Matrixpolynom ist. Anschließend findet man dann einfach eine hermitesche Determinantendarstellung von p (in Schritt 6 beschrieben). Dass M ein solches Matrixpolynom ist, wird mit Hilfe von 4.16 gezeigt.

3. <u>Alle Polstellen sind reell:</u>
   Dieser Punkt kommt im Vergleich zu obiger Diskussion neu hinzu, da es nicht klar ist, dass QCQ^{-1} wieder ein Matrixpolynom in $\mathbb{C}[Y]$ ist.

   Die einzigen möglichen Polstellen von M sind nach Bemerkung 4.10 die Nullstellen von $\det(Q)$ und haben somit Imaginärteil ≥ 0.

   Wegen 5.11 gilt $C^*H = HC$, also

   $$C^*Q^*Q = Q^*QC. \qquad (*)$$

   Da Q invertierbar ist, folgt hieraus durch Rechtsmultiplikation mit Q^{-1}

   $$C^*Q^* = C^*Q^*I_d = C^*Q^*(QQ^{-1}) = (C^*Q^*Q)Q^{-1} \stackrel{(*)}{=} (Q^*QC)Q^{-1} = Q^*M.$$

Linksmultiplikation mit $(Q^*)^{-1}$ liefert

$$(Q^*)^{-1}C^*Q^* = (Q^*)^{-1}Q^*M = M. \tag{$**$}$$

Somit sind die einzig möglichen Polstellen Nullstellen von $\det(Q^*) = \det(Q)^*$, welche alle Imaginärteil ≤ 0 haben. Also ist insgesamt jede Polstelle von M reell (Imaginärteil $= 0$).

4. <u>$M(x)$ ist hermitesch, falls $x \in \mathbb{R}$ keine Polstelle von M ist:</u>
   Sei $x \in \mathbb{R}$ <u>keine</u> Polstelle von M. Wegen $(**)$ gilt

$$\begin{aligned}
M(x) &= (Q^*)^{-1}(x)C^*(x)Q^*(x) \\
&= (Q^*(x))^{-1}C^*(x)Q^*(x) \\
&= (Q(x^*)^*)^{-1}C(x^*)^*Q(x^*)^* \\
&\overset{x\in\mathbb{R}}{=} (Q(x)^*)^{-1}C(x)^*Q(x)^* \\
&= (Q(x)^{-1})^*C(x)^*Q(x)^* \\
&= (Q(x)C(x)Q(x)^{-1})^* \\
&= (Q(x)C(x)Q^{-1}(x))^* \\
&= (QCQ^{-1})(x)^* \\
&= M(x)^*.
\end{aligned}$$

   Also ist für $x \in \mathbb{R}$, welches keine Polstelle von M ist, $M(x)$ hermitesch.

5. <u>M lineares hermitesches Matrixpolynom:</u>
   Im Gegensatz zu obiger Diskussion ist hier die Linearität des Matrixpolynoms nicht trivialerweise sichergestellt, da die Matrix $M = QCQ^{-1}$ nicht konstant ist.

   Da $M(x)$ hermitesch ist für alle reellen x, welche keine Polstellen von M sind, da alle Polstellen von M reell sind und da das charakteristische Polynom $\chi_M = q$ in $\mathbb{R}[T, Y]$ ist, greift Satz 4.16 und M ist ein lineares hermitesches Matrixpolynom.

6. Finden einer Determinantendarstellung von p:
   Wie in vorangegangener Diskussion kann man nun eine Determinantendarstellung von p finden.

   Da M ein lineares hermitesches Matrixpolynom ist, gibt es $A, B \in \mathbb{C}^{d\times d}$ hermitesch mit $M = -YA - B$. Es gilt also

$$q = \det(TI_d - C) = \det(TI_d - M) = \det(TI_d + YA + B).$$

   Man erhält nun insgesamt eine hermitesche Determinantendarstellung von p:

$$p = X^d q\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right) = X^d \det\left(\frac{1}{X} I_d + \frac{Y}{X} A + B\right) = \det(I_d + YA + XB).$$

□

Bemerkung 6.2. In [GKVW] wurde obiger Satz nur für eine dichte Teilmenge der rein reellen Polynome in $\mathbb{R}[X, Y]$ gezeigt und mit Hilfe von Limites gezeigt, dass dies genügt. Wie oben schon kurz erwähnt, besteht diese dichte Teilmenge aus glatten rein reellen Polynomen, nämlich rein reellen Polynomen $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ derart, dass

$$T^d p\left(\frac{1}{T}, \frac{y}{T}\right) \in \mathbb{R}[T] \qquad (d = \deg(p))$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ nur einfache Nullstellen besitzt. Dies hat zur Folge, dass $\det(H)$ keine reellen Nullstellen besitzt (vergleiche 5.14). Somit braucht man Lemma 4.16 nicht (beachte, dass die gefundene Determinantendarstellung wegen 2.16 trotzdem linear ist und dass sie trotzdem hermitesch ist, da sie nach 4. im Beweis für alle Auswertungen in $x \in \mathbb{R}$ hermitesch ist).

Die Konstruktion des obigen Beweises vermeidet also im Gegensatz zu [GKVW] komplett die Berechnung von Limites, es muss jedoch die quadratfreie Zerlegung des Polynoms ausgerechnet werden (siehe hierzu die nächste Bemerkung).

Bemerkung 6.3. Wenn $p \in K[X, Y]$ rein reell für ein Körper $K \subseteq \mathbb{R}$, dann genügt es, zur Berechnung einer Determinantendarstellung, die quadratfreie Zerlegung von p in $K[X, Y]$ zu bestimmen. Dies geht, da:

Sei $p \in K[X, Y]$ nun quadratfrei in $K[X, Y]$. Mit Lemma 5.19 ist dann auch das $q \in K[T, Y]$ aus dem obigen Beweis quadratfrei. Somit besitzt nach Lemma 5.18 die Hermite-Matrix von q auch Determinante ungleich 0. Der Rest des Beweises geht nun auch noch durch, da die Quadratfreiheit lediglich benötigt wird, um $\det(H) \neq 0$ zu zeigen.

Also wenn man beispielsweise ein rein reelles Polynom in $\mathbb{Q}[X, Y]$ hat, dann kann man mit einem effizienten Algorithmus die quadratfreie Zerlegung in $\mathbb{Q}[X, Y]$ des Polynoms ausrechnen und damit dann weiterrechnen. Dies erleichtert diesen Teil der Konstruktion erheblich und löst auch (zumindest in diesem Teil) das vor 3.25 angesprochene Problem, dass man in den reellen Zahlen nicht effektiv rechnen kann. Das einzige Problem bleibt noch die Berechnung der Faktorisierung der Hermite-Matrix, wie schon in 3.25 angesprochen.

Beispiel 6.4. Ziel dieses Beispiels ist es, eine Determinantendarstellung eines rein reellen Polynoms vom Grad 3 zu berechnen. Betrachte das Polynom aus dem Beispiel in der Einleitung und zwar

$$\begin{aligned} p &= (X-1)^3 + (Y-1)^3 + 3(X-1)(Y-1) \\ &= X^3 - 3X^2 + 3XY + Y^3 - 3Y^2 + 1. \end{aligned}$$

Gehe nun wie im Beweis von 6.1 vor:

Betrachte das Polynom

$$\begin{aligned} q &= T^3 p\left(\frac{1}{T}, \frac{Y}{T}\right) \\ &= T^3 - 3TY^2 + 3TY - 3T + Y^3 + 1. \end{aligned}$$

Stelle die Begleitmatrix von q auf:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Y^3 - 1 \\ 1 & 0 & 3Y^2 - 3Y + 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -Y^3 - 1 & 0 \\ 0 & 3Y^2 - 3Y + 3 & -Y^3 - 1 \\ 1 & 0 & 3Y^2 - 3Y + 3 \end{pmatrix},$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} -Y^3-1 & 0 & -(Y^3+1)(3Y^2-3Y+3) \\ 3Y^2-3Y+3 & -Y^3-1 & (3Y^2-3Y+3)^2 \\ 0 & 3Y^2-3Y+3 & -Y^3-1 \end{pmatrix},$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 0 & -(Y^3+1)(3Y^2-3Y+3) & (Y^3+1)^2 \\ -Y^3-1 & (3Y^2-3Y+3)^2 & -2(Y^3+1)(3Y^2-3Y+3) \\ 3Y^2-3Y+3 & -Y^3-1 & (3Y^2-3Y+3)^2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6(Y^2-Y+1) \\ 0 & 6(Y^2-Y+1) & -3(Y^3+1) \\ 6(Y^2-Y+1) & -3(Y^3+1) & 18(Y^2-Y+1)^2 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes muss H mit Satz 3.24 faktorisiert werden.

Zuerst muss H aufgeteilt werden in

$$p_1 := 3,\ q_1 := (0,\ 6(Y^2-Y+1))^T \text{ und } R_1 := \begin{pmatrix} 6(Y^2-Y+1) & -3(Y^3+1) \\ -3(Y^3+1) & 18(Y^2-Y+1)^2 \end{pmatrix}.$$

Faktorisiere als nächstes

$$\begin{aligned} p_1R_1 - q_1q_1^T &= \begin{pmatrix} 18(Y^2-Y+1) & -9(Y^3+1) \\ -9(Y^3+1) & 18(Y^2-Y+1)^2 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{9(Y^2-Y+1)}_{=:f} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -Y-1 \\ -Y-1 & 2(Y^2-Y+1) \end{pmatrix}}_{=:A}. \end{aligned}$$

Dazu genügt es offensichtlich f und A zu faktorisieren.

Das Faktorisieren von f geht ganz einfach zum Beispiel mit der Mitternachtsformel. Für $g := 3Y - \frac{3}{2} - \mathbf{i}\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(2Y - 1 - \mathbf{i}\sqrt{3})$ ist

$$\begin{aligned} g^*g &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 (2Y-1+\mathbf{i}\sqrt{3})(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3}) = \frac{9}{4}((2Y-1)^2 + (\sqrt{3})^2) \\ &= \frac{9}{4}((4Y^2-4Y+1)+3) = 9(Y^2-Y+1) \\ &= f. \end{aligned}$$

Teile A auf und erhalte

$$p_2 := 2,\ q_2 := -Y - 1 \text{ und } R_2 := 2(Y^2 - Y + 1).$$

Faktorisiere nun $p_2 R_2 - q_2 q_2^T$:

$$\begin{aligned} p_2 R_2 - q_2 q_2^T &= 4(Y^2 - Y + 1) - (Y + 1)^2 \\ &= 4Y^2 - 4Y + 4 - Y^2 - 2Y - 1 \\ &= 3(Y^2 - 2Y + 1) \\ &= \sqrt{3}(Y - 1)\sqrt{3}(Y - 1). \end{aligned}$$

Durch Zusammenfügen erhält man die Matrix

$$\begin{aligned} \tilde{N} &:= \begin{pmatrix} p_2 & q_2^T \\ 0 & \sqrt{3}(Y-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -Y - 1 \\ 0 & \sqrt{3}(Y-1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

für die $p_2 A = 2A = \tilde{N}^* \tilde{N}$ gilt. Also gilt

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}(Y+1) \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}(Y-1) \end{pmatrix}^* \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}(Y+1) \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}(Y-1) \end{pmatrix}}_{=:N}.$$

Insgesamt gilt also

$$p_1 R_1 - q_1 q_1^T = fA = g^* g N^* N = (gN)^* gN.$$

Füge nun zusammen und erhalte

$$p_1 H = 3H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1^T \\ 0 & gN \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} p_1 & q_1^T \\ 0 & gN \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
gN &= \frac{3}{2}(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3})\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}(Y+1) \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}(Y-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2}(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3}) & -\frac{3\sqrt{2}}{4}(Y+1)(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3}) \\ 0 & \frac{3\sqrt{6}}{4}(Y-1)(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Normiere und erhalte so

$$
\begin{aligned}
Q &:= \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} p_1 & q_1^T \\ 0 & gN \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3}(Y^2-Y+1) \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3}) & -\frac{\sqrt{6}}{4}(Y+1)(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3}) \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{4}(Y-1)(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$H = Q^*Q.$$

Das Inverse von Q in $\mathbb{C}(Y)^{3\times 3}$ ist

$$
Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{4\sqrt{2}(Y^2-Y+1)}{3(Y-1)(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3})} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3(2Y-\mathbf{i}\sqrt{3}-1)} & \frac{\sqrt{2}(Y+1)}{3(Y-1)(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3})} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3(Y-1)(2Y-1-\mathbf{i}\sqrt{3})} \end{pmatrix}.
$$

Definiere nun das lineare hermitesche Matrixpolynom

$$
\begin{aligned}
M &:= QCQ^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(2Y+\mathbf{i}\sqrt{3}-1) & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(2Y-\mathbf{i}\sqrt{3}-1) & -\frac{1}{2}(Y+1) & \frac{\sqrt{3}}{2}(Y-1) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(Y-1) & \frac{1}{2}(Y+1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wähle hermiteschen Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ derart, dass $M = -YA_2 - A_1$. Also gilt

$$
A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}\sqrt{3}-1) & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
$$

Insgesamt gilt nun

$$\begin{aligned}
p &= \det(I_3 + XA_1 + YA_2) \\
&= \det\left(I_3 + X\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}\sqrt{3}-1) & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}\sqrt{3}+1) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{i}\sqrt{3}+1)X - \sqrt{2}Y & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}\sqrt{3}+1)X - \sqrt{2}Y & 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y & \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y & 1 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Beispiel 6.5. Sei $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ rein reell mit $d := \deg(p) = 2$. Schreibe $q := T^2 p(\frac{1}{T}, \frac{Y}{T}) = T^2 + p_1 T + p_2 \in \mathbb{R}[T, Y]$, wobei $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[Y]$. Da p rein reell ist, hat $q(T, y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ nur reelle Nullstellen, also gilt $p_1^2(y) - 4p_2(y) \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Also gibt es $f \in \mathbb{C}[Y]$ mit $p_1^2 - 4p_2 = f^* f$ (was man durch Aufteilen der Nullstellen erreicht, da sie in komplex konjugierten Pärchen kommen). Sei nun C die Begleitmatrix von q (aufgefasst als Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{R}[Y]$ und in der Unbekannten T) und $H = (\operatorname{tr}(C^{i+j-2}))_{i,j \in \{1,2\}}$ die Hermite-Matrix von q.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -p_2 \\ 1 & -p_1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & -p_1 \\ -p_1 & p_1^2 - 2p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[Y]^{2\times 2}$$

Da p rein reell ist, ist H positiv semidefinit und kann somit faktorisiert werden (siehe Beispiel 3.26). Wähle

$$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}p_1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}f \end{pmatrix},$$

dann gilt $H = Q^* Q$.

Gelte nun $\det(H) \neq 0$ und somit auch $f = \det(Q) \neq 0$. Dann kann man $M := QCQ^{-1}$ definieren und erhält

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p_1 & \frac{1}{2}f^* \\ \frac{1}{2}f & -\frac{1}{2}p_1 \end{pmatrix}$$

und somit auch $q = \det(TI_2 - M)$. Letzteres gilt natürlich auch für $\det(H) = 0$ und $f = 0$. Es gilt $\deg(p_1) \leq 1$ und $\deg(f) \leq 1$ und somit ist M linear. Also gibt es $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ hermitesch mit $q = \det(TI_2 + A + YB)$. Insgesamt gilt also

$$p = X^2 q\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right) = \det(I_2 + XA + YB).$$

Beispiel 6.6. Betrachte wieder das rein reelle Polynom $p = 1 - X^2 - Y^2 \in \mathbb{Q}[X,Y]$ und $q = T^2 p\left(\frac{1}{T}, \frac{Y}{T}\right) = T^2 - Y^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X,Y]$. Sei

$$C = \begin{pmatrix} 0 & Y^2+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[Y]^{2\times 2}$$

die Begleitmatrix von q und

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(Y^2+1) \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[Y]^{2\times 2}$$

die Hermite-Matrix von q. Eine Faktorisierung von H sieht man schon direkt. Für

$$Q := \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}(Y - \mathbf{i}) \end{pmatrix}$$

gilt nämlich $H = Q^*Q$ und $\det(Q) = 2(Y - \mathbf{i})$ hat nur Nullstellen mit positivem Imaginärteil. Es gilt

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2(Y-\mathbf{i})} \end{pmatrix}.$$

Sei nun

$$M := QCQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(Y^2+1) \\ \sqrt{2}(Y-\mathbf{i}) & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & Y - \mathbf{i} \\ Y + \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist M ein lineares hermitesches Matrixpolynom. Wähle $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ hermitesch mit $M = -YB - A$. Also gilt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$p = \det(I_2 + XA + YB) = \det\left(I_2 + X\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Beispiel 6.7. Der ausgefüllte Einheitskreis des $\mathbb{R}^2$, also die Menge

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

ist ein Spektraeder, denn:
Definiere die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$1 - X^2 - Y^2 = \det(I_2 + XA + YB).$$

Wie man auf A und B kommt, sah man in Beispiel 6.6. Außerdem ist für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 - y^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \det(I_2 + xA + yB) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i}x - y \\ -\mathbf{i}x - y & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i}x - y \\ -\mathbf{i}x - y & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \ \&\ 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i}x - y \\ -\mathbf{i}x - y & 1 \end{pmatrix} \text{ ist positiv semidefinit} \\ &\Leftrightarrow I_2 + xA + yB \text{ ist positiv semidefinit.} \end{aligned}$$

In der vorletzten Äquivalenz geht das Hauptminoren-Kriterium für Positivsemidefinitheit ein. Also gilt

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid I_2 + xA + yB \text{ ist positiv definit}\}.$$

Warnung 6.8. Im Allgemeinen stimmt es jedoch **nicht**, dass Mengen der Form $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \det(I_d + xA + yB) \geq 0\}$ Spektraeder sind, da sie im Gegensatz zu Spektraedern nicht immer konvex sein müssen. Hierfür muss man eine neue Klasse von Mengen einführen und zwar

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall t \in (0,1) : p(xt, yt) \neq 0\},$$

wobei $p \in \mathbb{R}[X,Y]$ rein reell sein muss. Im Folgenden wird mit Hilfe einer Determinantendarstellung von p gezeigt, dass diese Menge (falls p rein reell ist) immer ein Spektraeder ist.

Notation 6.9. Sei R ein Ring und $a_1, \ldots, a_n \in R$. Dann wird mit

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $a_1, \ldots, a_n$ notiert.

Korollar 6.10 ([SCH1] Proposition 2.12)**.** Sei $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ rein reell. Dann ist

$$\mathrm{C}(p) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall t \in (0, 1) : p(xt, yt) \neq 0\}$$

ein Spektraeder.

Beweis. Wähle mit dem Satz von Helton-Vinnikov $A, B \in \mathbb{C}^{d\times d}$ hermitesch mit $p = \det(I_d + XA + YB)$, wobei $d = \deg(p)$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\forall t \in (0, 1) : p(xt, yt) \neq 0 \iff I_d + xA + yB \text{ positiv semidefinit}$$

zu zeigen. Wähle $U \in \mathbb{C}^{d\times d}$ unitär und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ diagonal ($\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$) derart, dass $D = U(xA + yB)U^*$. Es gilt nun also

$$\begin{aligned} I_d + xA + yB \text{ ist positiv semidefinit} &\iff I_d + D \text{ ist positiv semidefinit} \\ &\iff 1 + \lambda_1 \geq 0, \ldots, 1 + \lambda_d \geq 0 \\ &\iff \forall t \in (0, 1) : 1 + t\lambda_1 > 0, \ldots, 1 + t\lambda_d > 0 \\ &\iff \forall t \in (0, 1) : 1 + t\lambda_1 \neq 0, \ldots, 1 + t\lambda_d \neq 0 \\ &\iff \forall t \in (0, 1) : \det(I_d + tD) \neq 0 \\ &\iff \forall t \in (0, 1) : \det(I_d + txA + tyB) \neq 0 \\ &\iff \forall t \in (0, 1) : p(xt, yt) \neq 0 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{C}(p)$ ein Spektraeder, nämlich

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid I_d + xA + yB \text{ ist positiv semidefinit}\}.$$

□

Literaturverzeichnis

[HV] Helton, J.W., Vinnikov, V.: Linear matrix inequality representation of sets. Communications on Pure and Applied Mathematics, 60, 654–674 (2007).

[GKVW] Grinshpan, A., Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, D.S., Vinnikov, V., Woerdeman, H.J.: Stable and real-zero polynomials in two variables. Multidim Syst Sign Process 27, 1–26 (2016). https://doi.org/10.1007/s11045-014-0286-3

[SCH1] Schweighofer, M.: Spectrahedral relaxations of hyperbolicity cones. Preprint. [https://arxiv.org/abs/1907.13611]

[SCH2] Gespräch mit Markus Schweighofer (1.9.2020)

[SCH3] Schweighofer, M.: Antwort auf Forumsbeitrag auf Mathoverflow. https://mathoverflow.net/questions/114234/relating-a-polynomial-equation-to-the-characteristic-equation-of-a-hermitian-mat (Stand: 23.9.2020)

[HS] Hanselka, C., Schweighofer, M.: Positive semidefinite matrix polynomials. Unveröffentlicht.

[WIK1] Wikipedia: Geometrical properties of polynomial roots. https://en.wikipedia.org/wiki/Geometrical_properties_of_polynomial_roots (Stand: 23.9.2020)

[WIK2] Wikipedia: Square-free polynomial. https://en.wikipedia.org/wiki/Square-free_polynomial (Stand: 7.10.2020)

[Y] Yun, D.Y.Y.: On square-free decomposition algorithms. SYMSAC '76: Proceedings of the third ACM symposium on Symbolic and algebraic computation, 26-35, August 1976. https://doi.org/10.1145/800205.806320

[C] Cauchy, A.-L.: Exercices de mathématique (1829).

[RAG] Schweighofer, M.: Lecture Notes on Real Algebraic Geometry, Positivity and Convexity. http://www.math.uni-konstanz.de/∼schweigh/17/real-alg-geo-16-17.pdf (Stand: 23.9.2020)