Masterarbeit

Symmetrische Determinantendarstellungen Vielfacher rein reeller Polynome

vorgelegt von
David Sawall

an der Universität Konstanz

Oktober 2022

Betreuer: Prof. Dr. Markus Schweighofer

Inhaltsverzeichnis

Notationen und Konventionen

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- n, d, k seien natürliche Zahlen oder gleich 0.
- I_d (manchmal auch nur I) bezeichnet die Einheitsmatrix (der Größe $d \times d$).
- X, Y, T seien Variablen
- $\underline{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ sei ein n-Tupel von Variablen ($n \in \mathbb{N}_0$)
- $\mathbb{R}[\underline{X}] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$
- $X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\alpha_n}$, wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
- Alle Ringe (außer natürlich Matrizenringe) seien kommutativ.
- A^T ist die Transponierte einer Matrix A.
- $\mathrm{Skew}_d(R)$ ist die Menge der $(d \times d)$-Matrizen A über einem Ring R mit $A + A^T = 0$.
- $\sum R^2 := \{p_1^2 + \ldots + p_m^2 \mid m \in \mathbb{N}_0, p_1, \ldots, p_m \in R\}$, wobei R ein Ring ist.
- Ist R ein Ring und M ein R-Modul, $a \in M$, $K, L \subseteq M$ und $N \subseteq R$, dann sind

$$\begin{aligned} a + L &:= \{a + m \mid m \in L\}, \\ N \cdot L &:= \{nl \mid n \in N, l \in L\}, \\ K + L &:= \{k + l \mid k \in K, l \in L\}. \end{aligned}$$

- Für ein $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ schreiben wir
$$p > 0 \text{ auf } S,$$
falls $p(x) > 0$ für alle $x \in S$ gilt.

- e_i ist der i-te Einheitsvektor.

- $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$ ist der Quotientenkörper von $\mathbb{R}[\underline{X}]$.

- $\partial_{X_i} p$ ist die formale Ableitung von $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ nach der Variablen X_i für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_d)$ notiert für $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ die Diagonalmatrix
$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Einleitung

Ein *semidefinites Programm* (SDP) ist ein Optimierungsproblem der Form:

$$\boxed{\text{Minimiere } l(x) \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \text{ ist psd.}}$$

Hierbei ist $l \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ linear und $A_0, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ sind symmetrisch. Die zulässigen Mengen

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \text{ ist psd}\}$$

werden *Spektraeder* genannt.

Wir werden Spektraeder der Form $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid I_d + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \text{ ist psd}\}$ betrachten ($A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch), das heißt wir betrachten Spektraeder mit 0 im Inneren (siehe zum Beispiel [S1, Lemma 8.3]).

Um zu testen, ob eine konvexe Menge ein Spektraeder ist, ist es sinnvoll, den Rand der konvexen Menge genauer zu untersuchen. Ein Polynom, welches auf dem Rand von S veschwindet, ist zum Beispiel das Polynom

$$\det(I_d + X_1A_1 + \ldots + X_nA_n).$$

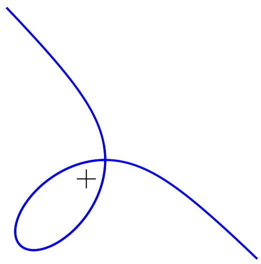
Wir nennen ein Polynom $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ *rein reell*, falls für alle $a \in \mathbb{R}^n$ das univariate Polynom $p(Ta) \in \mathbb{R}[T]$ nur reelle Nullstellen hat.

Zum Beispiel ein univariates Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit $p(0) \neq 0$ ist genau dann rein reell, wenn es nur reelle Nullstellen besitzt.

Das Polynom

$$p = (X-1)^3 + (Y-1)^3 + 3(X-1)(Y-1)$$

ist rein reell. Betrachtet man eine Ursprungsgerade, so hat diese stets 3 Schnittpunkte mit der blauen Nullstellenmenge im Bild unten, wenn mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit (zum Beispiel, wenn $a = (1,1)$) und Nullstellen im Unendlichen (zum Beispiel, wenn $a = (1,-1)$) mitzählt.



Wir sagen, dass ein Polynom p von Grad d eine *Determinantendarstellung* besitzt, falls es symmetrische Matrizen $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $p = \det(I_d + X_1 A_1 + \ldots + X_n A_n)$ gibt. Besitzt ein Polynom eine Determiantendarstellung, so ist es rein reell. Also kann man umgekehrt fragen, ob jedes rein reelle Polynom eine Determinantendarstellung besitzt. Helton und Vinnikov [HV] zeigten, dass dies für Polynome in 2 Variablen stimmt und Brändén [Brä] zeigte, dass es im Allgemeinen nicht funktioniert und gab ein konkretes Gegenbeispiel an.

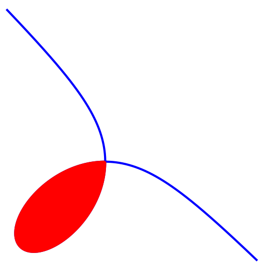
Da uns die Geometrie von Spektraedern interessiert, kann man eine abgeschwächte Vermutung auch für Spektraeder aufstellen. Dazu müssen wir aber zuerst zu einem rein reellen Polynom ein geometrisches Objekt zuordnen:

Ist $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ rein reell, so wird die Menge

$$\mathrm{C}(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall t \in (0,1) : p(tx) \neq 0\}$$

starr konvex genannt (und sie ist wirklich auch konvex wie Gårding [Går] zeigte).

In obigem Beispiel ist die starr konvexe Menge die rote Menge im folgenden Bild.



Besitzt p eine Determinantendarstellung $p = \det(I + X_1 A_1 + \ldots + X_n A_n)$, so ist $\mathrm{C}(p)$ ein Spektraeder und zwar

$$\mathrm{C}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid I + x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n \text{ ist psd}\}.$$

Der oben erwähnte Satz von Helton und Vinnikov besagt also insbesondere, dass die rote Menge ein Spektraeder ist. Dies wäre auch für höherdimensionale starr konvexe Mengen wünschenswert.

Verallgemeinerte Lax Vermutung
Jede starr konvexe Menge ist ein Spektraeder.

Die Vermutung ist noch offen. Eine äquivalente Formulierung ist:

Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ rein reell, dann gibt es $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ mit

1. pq besitzt eine Determinantendarstellung,
2. $\mathrm{C}(p) \subseteq \mathrm{C}(q)$.

Wir werden 1. für sogenannte strikt rein reelle Polynome zeigen, dabei werden wir jedoch keine Kontrolle über den Kofaktor q haben. Also haben wir keine Hoffnung den zweiten Punkt auch direkt mitzuzeigen.

Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ von Grad d heißt *strikt rein reell*, falls $p(Ta) \in \mathbb{R}[T]$ für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau d reelle Nullstellen hat oder Grad $d-1$ und genau $d-1$ reelle Nullstellen hat. Das heißt, strikt rein reelle Polynome sind die rein reellen Polynome, die entlang jeder Ursprungsgerade genau d verschiedene Nullstellen haben, wobei wir Nullstellen im Unendlichen mitzählen.

Betrachtet man wieder im Bild oben die Ursprungsgerade, die von $(1,1)$ aufgespannt wird, so hat diese nur zwei Schnittpunkte mit der Nullstellenmenge (gezählt dieses Mal ohne Vielfachheiten). Also ist das Polynom $p = (X-1)^3 + (Y-1)^3 + 3(X-1)(Y-1)$ nicht strikt rein reell.

Für $d \in \mathbb{N}$ liegt die Menge der strikt rein reellen Polynome von Grad kleiner d dicht in der Menge der rein reellen Polynome von Grad kleiner d (vergleiche [Nui]). Es ist jedoch nicht möglich ähnlich wie in [GKVW] mit einem Limes-Argument eine Determinantendarstellung für Vielfache rein reeller Polynome zu finden, die nicht strikt rein reell sind, da wir keine Kontrolle über den Kofaktor haben.

Unser Beweis basiert auf [Kum1] von Kummer, verwendet jedoch die Hermite-Matrix wie es Netzer, Plaumann und Thom in [NPT] taten, die das Finden einer Determinantendarstellung auf die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems (LGS) reduziert haben.

Die Arbeit ist in 5 Kapitel gegliedert. Im ersten Kapitel werden wir ein paar Eigenschaften zu rein reellen Polynomen sammeln und die Hermite-Matrix zum Zählen von Nullstellen einführen. Wir werden unser rein reelles Polynom p homogenisieren und die Hermite-Matrix H der Homogenisierung betrachten. Diese wird dann psd sein und sogar pd, falls p sogar strikt rein reell ist.

Im zweiten Kapitel zeigen wir einen (homogenen) Matrixpositivstellensatz, mit dem wir die positiv definite Hermite-Matrix H faktorisieren können in $qH = QQ^T$, wobei Q ein Matrixpolynom und q eine positiv definite homogene Quadratsumme ist. Hierfür verwenden wir einen inhomogenen Matrixpositivstellensatz, für den wir einen neuen Beweis geben. Außerdem schaffen wir es den reellen Nullstellensatz im Beweis der homogenen Version zu vermeiden. Hier diskutieren wir auch, wie man mit Hilfe eines SDPs eine solche Faktorisierung finden kann.

In den Kapiteln drei und vier werden wir dann das Hauptresultat beweisen, indem wir die Lösbarkeit eines LGS zeigen. Das LGS entsteht bei der Suche nach einem symmetrischen linearen Matrixpolynom M mit $QM = C^TQ$, wobei C die Begleitmatrix der Homogenisierung von p ist. Wenn wir ein solches M gefunden haben, so ist $\det(I-M)$ schon automatisch ein Vielfaches von p. In Kapitel drei werden wir ein Lemma beweisen, das es uns ermöglicht, aus einer nicht-symmetrischen Lösung M von $QM = C^TQ$ eine symmetrische zu bekommen.

Im letzten Kapitel werden wir uns dann noch einen Ansatz anschauen, bei dem wir unser strikt rein reelles Polynom als parametrisierte Familie univariater Polynome betrachten. Wir betrachten wieder die Homogenisierung $P \in \mathbb{R}[\underline{X}, T]$ von unserem strikt rein reellen Polynom und $f := P(1, X_2, \ldots, X_n, T)$. Dann hat $f(x, T)$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ nur reelle einfache Nullstellen und die (reelle) Hermite-Matrix $H(1, x)$ ist pd. Der inhomogene Matrixpositivstellensatz gibt uns dann ein Zertifikat

$$(1 + q)H(1, X_2, \ldots, X_n) = I + QQ^T,$$

wobei Q ein Matrixpolynom und q eine Quadratsumme ist. Weiter bekommen wir eine Darstellung von einem Vielfachen von f als charakteristisches Polynom eines symmetrischen Matrixpolynoms. Aus dieser Darstellung kann man zwar den Kofaktor der Darstellung ablesen, es ist jedoch im Allgemeinen nicht möglich eine Determinantendarstellung eines Vielfachen des strikt rein reellen Polynoms zu bekommen.

§1 Rein reelle Polynome und die Hermite-Matrix

Definition 1.1 Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ mit $p(0) = 1$ und von Grad d heißt *rein reell*, falls für alle $a \in \mathbb{R}^n$ das univariate Polynom $p(Ta) \in \mathbb{R}[T]$ nur reelle Nullstellen besitzt. Weiter heißt p *strikt rein reell*, falls es nur reelle einfache Nullstellen entlang jeder Ursprungsgerade besitzt (und zwar auch höchstens eine einfache Nullstelle im Unendlichen), das heißt, dass für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ das univariate Polynom $p(Ta) \in \mathbb{R}[T]$ genau d verschiedene reelle Nullstellen besitzt und von Grad d ist oder dass es von Grad $d-1$ ist und $d-1$ reelle Nullstellen besitzt (gezählt ohne Vielfachheiten).

Mehr zu der Definition von strikt rein reellen Polynomen in Bemerkung 1.32.

Bemerkung 1.2 Strikt rein reelle Polynome sind natürlich rein reell.

Die Voraussetzung $p(0) = 1$ bei der Definition eines rein reellen Polynoms p ist lediglich eine Normierung. Damit $p(T0) = p(0)$ nur reelle Nullstellen besitzt, muss insbesondere $p(0) \neq 0$ gelten.

Ein univariates Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit $p(0) = 1$ ist genau dann rein reell, wenn es nur reelle Nullstellen besitzt. Weiter ist es genau dann strikt rein reell, wenn es nur einfache reelle Nullstellen besitzt.

Beispiel 1.3 Das Polynom $p := 1 - X^2 - Y^2 - Z^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ ist strikt rein reell, denn das Polynom

$$T^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

hat für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ genau 2 reelle Nullstellen.

Auch geometrisch passt das, denn die reelle Nullstellenmenge beschreibt eine Kugel, welche den Ursprung als Mittelpunkt hat. Also hat jede Ursprungsgerade genau 2 Schnittpunkte mit der reellen Nullstellenmenge.

Notation 1.4 Sei R ein Ring und $M \in R^{d\times d}$ eine Matrix. Dann notieren wir mit $\chi_M := \det(TI_d - M) \in R[T]$ das *charakteristische Polynom* von M.

Erinnerung 1.5 Sei $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische Matrix. Dann hat χ_M nur reelle Nullstellen und ist normiert. Gleiches gilt für hermitesche Matrizen.

Proposition 1.6 Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrische Matrizen. Dann ist das Polynom

$$p := \det(I_d + X_1 A_1 + \ldots + X_n A_n)$$

rein reell.

Beweis. Erstmal ist $p(0) = 1$ klar. Sei also $a \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen zeigen, dass

$$q := p(Ta) = \det(I_d + T(a_1 A_1 + \ldots + a_n A_n)) \in \mathbb{R}[T]$$

nur reelle Nullstellen besitzt. Notiere

$$M := -(a_1 A_1 + \ldots + a_n A_n).$$

Dann gilt $q = \det(I_d - TM)$. Betrachte das Polynom $q^* := T^d q\left(\frac{1}{T}\right)$ (das ist das reziproke Polynom von q, falls $d = \deg q$). Es gilt also

$$q^* = T^d q\left(\frac{1}{T}\right) = T^d \det\left(I_d - \frac{1}{T}M\right) = \det(TI_d - M) = \chi_M.$$

Da M symmetrisch ist, hat χ_M nur reelle Nullstellen. Da für jede Nullstelle $t \in \mathbb{C}$ von q auch t^{-1} eine Nullstelle von q^* ist, ist $t \in \mathbb{R}$ (beachte $q(0) = p(0) = 1$). Also ist p rein reell. □

Sprechweise 1.7 Wir sagen, dass ein (rein reelles) Polynom $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ von Grad d eine *Determinantendarstellung* besitzt, falls es symmetrische Matrizen $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit

$$p = \det(I_d + X_1 A_1 + \ldots + X_n A_n)$$

gibt.

Bemerkung 1.8 In Proposition 1.6 haben wir gesehen, dass jedes Polynom, welches eine Determinatendarstellung besitzt, rein reell ist.

Die Umkehrung stimmt im Allgemeinen nicht (siehe [Brä]). Helton und Vinnikov zeigten, dass bivariate rein reelle Polynome stets eine Determinantendarstellung besitzen (siehe [HV] und siehe [GKVW] und [Saw] für einfache Beweise für hermitesche Determinantendarstellungen).

Satz 1.9 (Satz von Helton und Vinnikov) Sei $p \in \mathbb{R}[X,Y]$ mit $p(0) = 1$ von Grad d. Dann ist p genau dann rein reell, wenn es symmetrische Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gibt mit

$$p = \det(I_d + XA + YB).$$

Beweis. Siehe zum Beispiel [HV]. □

Korollar 1.10 Sei $p \in \mathbb{R}[X,Y]$ mit $p(0) = 1$ von Grad d. Dann ist p genau dann rein reell, wenn es hermitesche Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{d\times d}$ gibt mit

$$p = \det(I_d + XA + YB).$$

Beweis. Siehe zum Beispiel [Saw] oder [GKVW]. □

Definition 1.11 Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ rein reell. Dann nennen wir die Menge

$$\mathrm{C}(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall t \in (0,1) : p(tx) \neq 0\}$$

starr konvex.

Bemerkung 1.12 Ist $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ rein reell, so ist $\mathrm{C}(p)$ konvex, wie Gårding [Går, Satz 2] (für Hyperbolizitästkegel) feststellte (siehe auch [S1, Satz 2.15]).

Erinnerung 1.13 Eine reelle symmetrische Matrix...

- ...hat nur reelle Eigenwerte.
- ...heißt *positiv semidefinit (psd)*, falls sie keine negativen Eigenwerte besitzt.
- ...heißt *positiv definit (pd)*, falls sie nur positive Eigenwerte besitzt.

Definition 1.14 Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Spektraeder*, falls es symmetrische Matrizen $A_0, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gibt mit

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \text{ ist psd}\}.$$

Wir schreiben manchmal etwas nachlässig, dass die *lineare Matrixungleichung*

$$A_0 + X_1A_1 + \ldots + X_nA_n \succeq 0$$

den Spektraeder S definiert. Hierbei meint „$\succeq 0$“, dass die Matrix, die durch Einsetzen eines Punktes aus S entsteht, psd sein soll.

Proposition 1.15 ([S1, Proposition 2.12]) Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ ein (rein reelles) Polynom mit Determinantendarstellung. Dann ist $\mathrm{C}(p)$ ein Spektraeder.

Beweis. Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrische Matrizen mit

$$p = \det(I_d + X_1A_1 + \ldots + X_nA_n).$$

Wir zeigen

$$\mathrm{C}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid I_d + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \text{ ist psd}\}.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ orthogonal und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ mit $UMU^{-1} = D$, wobei $M := x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte (gezählt entsprechend ihrer Vielfachheiten) von M sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{C}(p) &\iff \forall t \in (0,1) : p(tx) \neq 0\\
&\iff \forall t \in (0,1) : p(tx) > 0\\
&\iff \forall t \in (0,1) : \det(I_d + tM) > 0\\
&\iff \forall t \in (0,1) : \det(I_d + tD) > 0\\
&\iff \forall t \in (0,1) : \forall i \in \{1, \ldots, d\} : 1 + t\lambda_i > 0\\
&\iff 1 + \lambda_1 \geq 0, \ldots, 1 + \lambda_d \geq 0\\
&\iff I_d + D \text{ ist psd}\\
&\iff I_d + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \text{ ist psd.}
\end{aligned}$$

□

Die Umkehrung der Proposition ist noch offen und bekannt als *verallgemeinerte Lax-Vermutung*. Siehe [Lax] für die Lax-Vermutung und [HV] für die verallgemeinerte Lax-Vermutung.

Vermutung 1.16 (Verallgemeinerte Lax-Vermutung) Für jedes rein reelle Polynom $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ ist $\mathrm{C}(p)$ ein Spektraeder.

Proposition 1.17 ([S1, Satz 8.8]) Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ rein reell und $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ derart, dass pq eine Determinantendarstellung besitzt und dass

$$\mathrm{C}(p) \subseteq \mathrm{C}(q)$$

gilt. Dann ist $\mathrm{C}(p)$ ein Spektraeder.

Beweis. Nach vorheriger Proposition ist $\mathrm{C}(pq)$ ein Spektraeder. Also reicht es $\mathrm{C}(pq) = \mathrm{C}(p)$ zu zeigen. Es gilt wie gewünscht

$$\mathrm{C}(pq) = \mathrm{C}(p) \cap \mathrm{C}(q) = \mathrm{C}(p).$$

□

Bemerkung 1.18 Die Umkehrung der vorherigen Proposition gilt auch (siehe zum Beispiel [S1, Satz 8.8]).

Um die Verallgemeinerte Lax-Vermutung zu zeigen, reicht es also die Voraussetzung der vorherigen Proposition für alle rein reelle Polynome zu prüfen.

Definition 1.19 Sei R ein Ring und $p = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0 \in R[X]$ ein normiertes Polynom mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{d-1}$ in R. Definiere die *Begleitmatrix* von p durch

$$C_p := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \in R^{d \times d}.$$

Erinnerung 1.20 Es gilt $p = \det(XI - C_p) = \chi_{C_p}$ für normiertes $p \in R[X]$.

Definition 1.21 Sei R ein Ring und $p \in R[X]$ ein normiertes Polynom von Grad d. Dann heißt die symmetrische Matrix $(\mathrm{tr}(C_p^{i+j-2}))_{i,j \in \{1,\ldots,d\}} \in R^{d \times d}$ *Hermite-Matrix* von p.

Erinnerung 1.22 ([S2, Korollar 1.6.6]) Sei $p \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes Polynom von Grad d und $H \in \mathbb{R}^{d \times d}$ dessen Hermite-Matrix. Dann ist der Rang von H die Anzahl der komplexen Nullstellen von p und das Signum von H die Anzahl der reellen Nullstellen von p.

Bemerkung 1.23 Vorherige Erinnerung bedeutet insbesondere, dass ein normiertes Polynom genau dann nur reelle Nullstellen besitzt, wenn dessen Hermite-Matrix psd ist. Weiter besitzt es genau dann nur einfache reelle Nullstellen, wenn dessen Hermite-Matrix pd ist.

Sprechweise 1.24 Die Elemente von $\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d} = \mathbb{R}^{d\times d}[\underline{X}]$ nennen wir auch *Matrixpolynome.*

Notation 1.25 Sei $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ ein Matrixpolynom ($m_{i,j} \in \mathbb{R}[\underline{X}]$) und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann notieren wir mit $M(x)$ die Matrix $(m_{i,j}(x))_{i,j} \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Definition 1.26 Wir nennen ein Matrixpolynom $M \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ *positiv semidefinit (psd)*, falls $M(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ psd ist. Weiter heißt M *positiv definit (pd)*, falls $M(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pd ist.

Bemerkung 1.27 Bei der Positivdefinitheit eines Matrixpolynoms fordern wir nicht, dass dieses an der Stelle 0 positiv definit ist, denn wir werden hauptsächlich Matrixpolynome mit homogenen Einträgen betrachten.

Bemerkung 1.28 Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist genau dann als reelle Matrix psd (pd), wenn sie als Matrixpolynom (aufgefasst in $\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$) psd (pd) ist.

Psd Matrixpolynome sind automatisch (als Matrizen) symmetrisch.

Beispiel 1.29 Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}] = \mathbb{R}[\underline{X}]^{1\times 1}$. Dann ist p genau dann psd, wenn $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Weiter ist p genau dann pd, wenn $p(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Definition 1.30 Sei R ein Ring und $p \in R[\underline{X}]$ ein Polynom von Grad d. Dann heißt das Polynom $T^d p\left(\frac{X_1}{T}, \dots, \frac{X_n}{T}\right) \in R[\underline{X}, T]$ *Homogenisierung* von p.

Proposition 1.31 ([NPT, Korollar 1.2]) Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ ein Polynom von Grad d mit Homogenisierung $P \in \mathbb{R}[\underline{X}, T]$ und $p(0) = 1$. Sei $H \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ die Hermite-Matrix von P. Dann ist p genau dann rein reell, wenn H psd ist. Weiter ist p genau dann strikt rein reell, wenn H pd ist.

Beweis. Für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} &p(aT) \text{ hat } d \text{ reelle Nullstellen oder hat Grad } d-1 \text{ und } d-1 \text{ reelle Nullstellen} \\ \overset{(*)}{\Longleftrightarrow}\ & P(a,T) = T^d p\left(\frac{1}{T}a\right) \text{ hat } d \text{ reelle Nullstellen} \\ \overset{1.23}{\Longleftrightarrow}\ & H(a) \text{ ist pd.} \end{aligned}$$

Also haben wir, dass p genau dann strikt rein reell ist, wenn H pd ist.

Die Aussage über rein reelle Polynome geht analog. □

Bemerkung 1.32 Die Definition von strikt rein reell ist genau so gewählt, dass man bei $(*)$ eine Äquivalenz bekommt und die Hermite-Matrix pd ist.

Beispiel 1.33 Das Polynom $p := (1 - X - Y)(1 + X + Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ ist als Produkt von linearen Polynomen rein reell. Die Begleitmatrix der Homogenisierung $P = T^2 - (X+Y)^2$ ist

$$C = \begin{pmatrix} 0 & (X+Y)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Hermite-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(X+Y)^2 \end{pmatrix}.$$

Da aber H an der Stelle $(1,-1)$ nicht pd ist, ist p nicht strikt rein reell. Dies hätte man auch direkt sehen können, denn

$$p(T,-T) = (1-T+T)(1+T-T) = 1$$

hat keine Nullstellen, aber p ist von Grad 2.

Die nächste Erinnerung und das darauffolgende Lemma benötigen wir, damit unsere Determinantendarstellung auch symmetrisch wird.

Erinnerung 1.34 (siehe zum Beispiel [Saw, Lemma 5.10] für einen detaillierten Beweis) Sei $p \in \mathbb{R}[X]$ normiert von Grad d mit nur reellen Nullstellen. Dann ist die Begleitmatrix C von p die Darstellungsmatrix des Vektorraumendomorphismuses

$$\phi : \mathbb{R}[X]/(p) \to \mathbb{R}[X]/(p), \quad \overline{q} \mapsto \overline{Xq} \qquad (q \in \mathbb{R}[X])$$

bezüglich der Basis $(\overline{1}, \dots, \overline{X^{d-1}})$.

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ die Nullstellen von p (gezählt entsprechend ihrer Vielfachheiten), so definiert

$$b : \mathbb{R}[X]/(p) \times \mathbb{R}[X]/(p) \to \mathbb{R}, \quad (\overline{f}, \overline{g}) \mapsto \sum_{i=1}^{d} f(\alpha_i)g(\alpha_i) \qquad (f, g \in \mathbb{R}[X])$$

eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}[X]/(p)$. Es gilt

$$b(\phi(v), w) = b(v, \phi(w))$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}[\underline{X}]/(p)$ und die Hermite-Matrix H von p ist die Darstellungsmatrix von b bezüglich der Basis $(\overline{1}, \ldots, \overline{X^{d-1}})$. Also gilt

$$C^T H = HC.$$

Lemma 1.35 ([NPT, Lemma 2.2]) Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ rein reell von Grad d. Sei $P \in \mathbb{R}[\underline{X}, T]$ die Homogenisierung von p. Schreibe $H \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d \times d}$ für die Hermite-Matrix und $C \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d \times d}$ für die Begleitmatrix von P. Dann gilt

$$C^T H = HC.$$

Beweis. Da für $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Matrix $H(a)$ die Hermite-Matrix und $C(a)$ die Begleitmatrix des Polynoms $P(a, T)$ ist (welches nur reelle Nullstellen besitzt), folgt mit vorheriger Erinnerung $C(a)^T H(a) = H(a)C(a)$. $\square$

§2 Matrixpositivstellensatz

In diesem Kapitel verallgemeinern wir den Positivstellensatz von Krivine und Stengle auf Matrixpolynome und folgern eine homogene Version der Verallgemeinerung. Der Matrixpositivstellensatz wurde in [Kum3] und der homogene Matrixpositivstellensatz wurde in [Kum1] bewiesen und ist auf unsere Anwendung zurechtgeschnitten. Wir werden jedoch einen anderen Beweis geben, der Methoden aus [HS] verwendet.

Satz 2.1 (Krivine-Stengle-Positivstellensatz, [Kri, Ste]) Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $p > 0$ auf $\mathbb{R}^n$,
- $\exists q \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 : qp \in 1 + \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$,
- $\exists q \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 : (1+q)p \in 1 + \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$.

Satz 2.2 (Matrixpositivstellensatz, [Kum3, Satz 3.14]) Sei $A \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ ein Matrixpolynom derart, dass $A(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}^n$ pd ist. Dann gibt es ein $Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times k}$ und ein $q \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$ mit

$$(1+q)A = I_d + QQ^T.$$

Die Rückrichtung gilt natürlich auch.

Bevor wir den Satz beweisen können, brauchen wir noch ein Lemma und ein wenig Notation.

Lemma 2.3 ([HS, Bemerkung 3.5]) Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$. Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ pd und seien $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^{d-1}$ und $C, D \in \mathbb{R}^{(d-1)\times(d-1)}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} D & w \\ w^T & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & v^T \\ v & C \end{pmatrix}.$$

Dann sind $bD - ww^T$ und $aC - vv^T$ auch positiv definit.

Beweis. Betrachte die Matrizen

$$U := \begin{pmatrix} bI_{d-1} & 0 \\ -w^T & 1 \end{pmatrix} \text{ und } V := \begin{pmatrix} 1 & -v^T \\ 0 & aI_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$U^T A U = \begin{pmatrix} bI_{d-1} & -w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} bD - ww^T & w \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{=AU} = b \begin{pmatrix} bD - ww^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$V^T A V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & aI_{d-1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ v & aC - vv^T \end{pmatrix}}_{AV} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & aC - vv^T \end{pmatrix}.$$

Da A positiv definit ist, ist somit auch $bD - ww^T$ und $aC - vv^T$ positiv definit, da $a > 0$ und $b > 0$. □

Definition 2.4 Wir sagen, dass ein Matrixpolynom $A \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d \times d}$ eine $(d \times d)$-*Quadratsumme* ist, wenn es eine Matrix $Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d \times k}$ mit $A = QQ^T$ gibt. Wir schreiben SOS_d für die Menge aller $(d \times d)$-Quadratsummen.

Beispiel 2.5 Es gilt $\sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 = \mathrm{SOS}_1$.

Proposition 2.6 Seien $A, B \in \mathrm{SOS}_d$ und $p \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$. Dann sind pA und $A + B$ auch Quadratsummen. Also in Zeichen

$$\mathrm{SOS}_d + \mathrm{SOS}_d \subseteq \mathrm{SOS}_d \text{ und } \left(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2\right) \cdot \mathrm{SOS}_d \subseteq \mathrm{SOS}_d\,.$$

Beweis. Sei $Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d \times k}$ und $N \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d \times l}$ mit $A = QQ^T$ und $B = NN^T$. Schreibe $p = p_1^2 + \ldots + p_m^2$ mit $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. Dann gilt

$$pA = \begin{pmatrix} p_1 Q & \cdots & p_m Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 Q & \cdots & p_m Q \end{pmatrix}^T$$

und

$$A + B = \begin{pmatrix} Q & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & N \end{pmatrix}^T.$$

□

Beweis des Matrixpositivstellensatzes 2.2. Wir verfahren per Induktion nach der Größe $d \in \mathbb{N}_0$ des Matrixpolynoms.

Für $d = 0$ ist nichts zu zeigen und für $d = 1$ ist dies genau die Aussage des Positivstellensatzes von Krivine und Stengle 2.1.

Gelte also nun $d > 1$. Seien $a, b \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $v, w \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d-1}$ und $C, D \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{(d-1)\times(d-1)}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & v^T \\ v & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & w \\ w^T & b \end{pmatrix}.$$

Es sind $(aC - vv^T)(x)$ und $(bD - ww^T)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv definit nach Lemma 2.3. Wähle mit der Induktionsvoraussetzung $M, N \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{(d-1)\times k}$ und $p, q \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$ mit

$$p(aC - vv^T) = I_{d-1} + MM^T \qquad \text{und} \qquad q(bD - ww^T) = I_{d-1} + NN^T.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} paA &= \begin{pmatrix} pa^2 & pav^T \\ pav & paC \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pa^2 & pav^T \\ pav & I_{d-1} + MM^T + pvv^T \end{pmatrix} \\ &= p \begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{d-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}^T \\ &\in \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{d-1} \end{pmatrix} + \mathrm{SOS}_d \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} qbA &= \begin{pmatrix} qbD & qbw \\ qbw^T & qb^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{d-1} + NN^T + qww^T & qbw \\ qbw^T & qb^2 \end{pmatrix} \\ &= q \begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}^T \\ &\in \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{SOS}_d\,. \end{aligned}$$

Somit erhält man durch Aufaddieren

$$\begin{aligned}(pa+qb)A &\in \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{d-1} \end{pmatrix} + \mathrm{SOS}_d \\ &= I_d + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{d-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{SOS}_d \\ &\subseteq I_d + \mathrm{SOS}_d\,.\end{aligned}$$

Da $(pa+qb)A \in I_d + \mathrm{SOS}_d$, ist $((pa+qb)A)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv definit und somit ist $pa+qb > 0$ auf $\mathbb{R}^n$. Also gibt es nach dem Positivstellensatz von Krivine und Stengle $f, g \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$ mit $(1+f)(pa+qb) = 1+g$. Es gilt also wie gewünscht

$$(1+g)A = (1+f)(pa+qb)A \in I_d + \mathrm{SOS}_d\,.$$

□

Beispiel 2.7 Betrachte das Matrixpolynom

$$H := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2X^2+2Y^2+2 \end{pmatrix},$$

welches an jedem Punkt im $\mathbb{R}^2$ pd ist. Wir müssen also

$$2 \cdot (2X^2+2Y^2+2) = (2X^2+2Y^2+2) \cdot 2$$

als Quadratsumme schreiben. Wähle also

$$N := \begin{pmatrix} 2X & 2Y & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $I_1 + NN^T = 4X^2+4Y^2+4$ und wir haben

$$\begin{aligned} 2H &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}^T \\ (2X^2+2Y^2+2)H &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2X^2+2Y^2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2X^2+2Y^2+2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \\ &\quad + \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Aufaddieren und Zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned}&(2X^2+2Y^2+4)H\\ &= I_2 + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & N \\ 0 & N & 2X^2+2Y^2+2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & N \\ 0 & N & 2X^2+2Y^2+2 & 0\end{pmatrix}^T.\end{aligned}$$

Einfacher gilt auch $H = I_2 + QQ^T$, wobei

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}X & \sqrt{2}Y\end{pmatrix}.$$

Bemerkung 2.8 Alternativ hätten wir auch ein SDP lösen können, um eine solche Darstellung zu bekommen. Dazu geben wir ein Kriterium an, wann ein Matrixpolynom eine Quadratsumme ist. Für Polynome in $\sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$ ist das leicht und unter *Gram-Matrix-Methode* bekannt (siehe zum Beispiel [S2, Satz 2.6.1]). Wir orientieren uns hierbei an einer Bemerkung in dem Beweis von [HN, Lemma 7].

Proposition 2.9 Sei $H \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ von Grad höchstens e (als Polynom in $\underline{X}$). Sei $N := \#\{X^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le e\}$ die Anzahl der Monome von Grad kleiner gleich e und schreibe $\{X^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le e\} = \{m_1, \dots, m_N\}$. Schreibe $\mathbf{M}$ für den Vektor

$$\Big(T_1 m_1, \dots, T_1 m_N, \dots\dots, T_d m_1, \dots, T_d m_N\Big)^T$$

und $\mathbf{T}$ für den Vektor

$$\Big(T_1, \dots, T_d\Big)^T.$$

Dann ist $H \in \mathrm{SOS}_d$ genau dann, wenn es eine psd Matrix $A \in \mathbb{R}^{(Nd)\times(Nd)}$ mit

$$\mathbf{M}^T A \mathbf{M} = \mathbf{T}^T H \mathbf{T}$$

gibt.

Beweis. Gelte $H \in \mathrm{SOS}_d$ und sei $Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{k\times d}$ mit $H = Q^T Q$. Schreibe

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_d \end{pmatrix},$$

wobei $q_1, \dots, q_d \in \mathbb{R}[\underline{X}]^k$. Wähle nun $Q_1, \dots, Q_d \in \mathbb{R}^{k\times N}$ mit

$$q_i = Q_i \Big(m_1, \dots, m_N\Big)^T$$

und setze
$$A := \begin{pmatrix} Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(Nd)\times(Nd)}.$$
Es gilt
$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^T A\mathbf{M} &= \mathbf{M}^T \begin{pmatrix} Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix} \mathbf{M} \\
&= \left(T_1Q_1(m_1,\dots,m_N)^T + \dots + T_dQ_d(m_1,\dots,m_N)^T\right)^T \\
&\cdot \left(T_1Q_1(m_1,\dots,m_N)^T + \dots + T_dQ_d(m_1,\dots,m_N)^T\right) \\
&= \left(T_1q_1 + \dots + T_dq_d\right)^T \left(T_1q_1 + \dots + T_dq_d\right) \\
&= \mathbf{T}^T Q^T Q\mathbf{T} \\
&= \mathbf{T}^T H\mathbf{T}.
\end{aligned}$$

Sei für die Rückrichtung $A \in \mathbb{R}^{(Nd)\times(Nd)}$ psd mit
$$\mathbf{M}^T A\mathbf{M} = \mathbf{T}^T H\mathbf{T}.$$
Dann gibt es aber eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{(Nd)\times(Nd)}$ mit $A = B^T B$. Schreibe nun
$$B = \begin{pmatrix} Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix},$$
wobei $Q_1,\dots,Q_d \in \mathbb{R}^{(Nd)\times N}$ und setze
$$Q := \begin{pmatrix} Q_1(m_1,\dots,m_N)^T & \dots & Q_d(m_1,\dots,m_N)^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{(Nd)\times d}.$$
Wie bei der Hinrichtung rechnet man $\mathbf{T}^T H\mathbf{T} = \mathbf{T}^T Q^T Q\mathbf{T}$ nach und erhält somit $H = Q^T Q$. □

Korollar 2.10 Ist $H \in \mathrm{SOS}_d$ von Grad e (als Polynom in $\underline{X}$), so gibt es eine Matrix $Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times(Nd)}$ mit
$$H = QQ^T,$$
wobei N die Anzahl der Monome in $\underline{X}$ von Grad kleiner gleich e ist.

Definition 2.11 (Siehe zum Beispiel [Eis, Abschnitt I.1.4]) Sei R ein Ring und $R_i \subseteq R$ für $i \in \mathbb{N}_0$ eine Untergruppe von $(R,+)$. Gilt $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ und $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$ für alle $i,j \in \mathbb{N}_0$, so heißt $(R_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine *Graduierung* von R.

Sei M ein R-Modul und $M_i \subseteq M$ für $i \in \mathbb{Z}$ eine Untergruppe von M. Gilt $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ und $R_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \mathbb{Z}$, so heißt $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine *Graduierung* von M.

Die Elemente ungleich 0 von R_d beziehungsweise M_d werden *homogen von Grad* d genannt.

Erinnerung 2.12 Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, welches eine $\mathbb{R}$-Linearkombination von Monomen von Grad d ist, heißt *d-Form*. Weiter heißt ein Polynom $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ *homogen*, falls es ein $d \in \mathbb{N}_0$ gibt so, dass p eine d-Form ist. Wir schreiben $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$ für den Untervektorraum aller d-Formen von $\mathbb{R}[\underline{X}]$. Es gilt $\mathbb{R}[\underline{X}] = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}_0} \mathbb{R}[\underline{X}]_d$ und $\mathbb{R}[\underline{X}]_d \cdot \mathbb{R}[\underline{X}]_e \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{d+e}$, das heißt $(\mathbb{R}[\underline{X}]_d)_{d\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Graduierung von $\mathbb{R}[\underline{X}]$.

Man sieht sofort, dass für Polynome die beiden Definitionen von *homogen* übereinstimmen.

Wir benötigen einen homogenen Matrixpositivstellensatz, doch dazu müssen wir erst erklären, wann ein Matrixpolynom homogen ist. Wir hätten gerne, dass die Hermite-Matrix eines (bezüglich einer Variablen normierten) homogenen Polynoms homogen ist.

Der (i, j)-te Eintrag einer Hermite-Matrix eines homogenen Polynoms ist homogen von Grad $i + j - 2$, wie wir zeigen werden.

Definition 2.13 Ein Matrixpolynom $H \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ heißt *homogen von Grad $e \in \mathbb{Z}$*, falls $H \neq 0$ und der (i, j)-te Eintrag von H eine $(e + i + j - 2)$-Form ist. Notiere mit $(\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d})_e$ die Menge aller homogenen Matrixpolynome von Grad e und der Nullmatrix. Hierbei ist 0 für alle $e \in \mathbb{Z}$ eine e-Form.

Beispiel 2.14 Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

ist homogen von Grad -1.

Lemma 2.15 **([S3])** Sei $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ ein Polynom von Grad d mit $p(0) = 1$ und $P \in \mathbb{R}[\underline{X}, T]$ dessen Homogenisierung. Sei $C \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ die Begleitmatrix von P. Dann ist $\operatorname{tr}(C^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ homogen von Grad k.

Beweis. Die Begleitmatrix C hat folgende Gradstruktur:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ -(d-1) & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hierbei steht die Zahl, die im (i,j)-ten Eintrag steht, dafür dass dort eine $(j-i+1)$-Form steht. Die k-te Potenz von C hat somit folgende Gradstruktur:

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & k+d \\ k & k+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & k+2 \\ k-d+1 & \cdots & k & k+1 \end{pmatrix},$$

das heißt im (i,j)-ten Eintrag steht eine $(j-i+k)$-Form. Also ist die Spur von C^k homogen von Grad k. □

Proposition 2.16 Die Hermite-Matrix der Homogenisierung eines rein reellen Polynoms ist homogen von Grad 0.

Proposition 2.17 Die Familie $((\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d})_e)_{e\in\mathbb{Z}}$ ist eine $\mathbb{R}[\underline{X}]$-Graduierung von $\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$.

Beweis. Da $\bigoplus_{e\in\mathbb{N}_0}\mathbb{R}[\underline{X}]_e = \mathbb{R}[\underline{X}]$ gilt, ist $\bigoplus_{e\in\mathbb{Z}}(\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d})_e = \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$. Beachte hierbei, dass Matrixpolynome auch negativen Grad haben können.

Sei nun $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_e$ und $A \in (\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d})_f$. Dann hat der (i,j)-te Eintrag von pA Grad $e + (f + i + j - 2)$ und ist homogen oder er ist gleich 0. Also gilt $pA \in (\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d})_{e+f}$. □

Beispiel 2.18 Für den (nicht-kommutativen) Ring $\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ ist $((\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d})_e)_{e\in\mathbb{Z}}$ keine Ring-Graduierung, denn die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & X^2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} X & X^2 \\ 0 & X^3 \end{pmatrix}$$

sind homogen (von Grad 0 beziehungsweise 1), jedoch ihr Produkt

$$\begin{pmatrix} X & X^2+X^4 \\ 0 & X^5 \end{pmatrix}$$

ist nicht homogen.

Definition 2.19 Sei $v \in \mathbb{R}[\underline{X}]^d$ und $e \in \mathbb{N}_0$. So nennen wir v *homogen von Grad* e, falls $v_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{e+i-1}$ und $v \neq 0$. Wir schreiben $(\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_e$ für die Menge aller homogenen $v \in \mathbb{R}[\underline{X}]^d$ von Grad e und des Nullvektors.

Notation 2.20 Schreibe $(\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e}$ für die Menge $\bigoplus_{i \geq e}(\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_i$ für $e \in \mathbb{Z}$. Dies ist der $\mathbb{R}[\underline{X}]$-Untermodul von $\mathbb{R}[\underline{X}]^d$ aller $v \in \mathbb{R}[\underline{X}]^d$ derart, dass in v_i kein Monom von Grad kleiner $e + i - 1$ vorkommt.

Bemerkung 2.21 Es gilt $\mathbb{R}[\underline{X}]_e = (\mathbb{R}[\underline{X}]^1)_e = (\mathbb{R}[\underline{X}]^{1\times 1})_e$.

Beispiel 2.22 Sind $v, w \in \mathbb{R}[\underline{X}]^d$ homogen von Grad e beziehungsweise f, so ist vw^T homogen von Grad $e + f$.

Proposition 2.23 Ist $H \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d} \setminus \{0\}$ homogen von Grad e und psd, dann ist e gerade.

Beweis. Scheibe $H = (h_{i,j})_{i,j}$ $(h_{i,j} \in \mathbb{R}[\underline{X}])$. Da $H \neq 0$ psd ist, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ mit $h_{i,i} \neq 0$. Also ist $h_{i,i}$ homogen von Grad $e + 2i - 2$ und psd. Somit muss $e + 2i - 2$ und damit auch e gerade sein (siehe zum Beispiel [S2, Proposition 2.2.5]). □

Bemerkung 2.24 Ist $H \in (\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d})_e$ positiv definit, so ist $e \in 2\mathbb{N}_0$, denn der $(1, 1)$-te Eintrag von H muss pd, also insbesondere von Grad $e \in 2\mathbb{N}_0$ sein.

In [Kum1, Lemma 3] folgerte Kummer aus einem (anderen) Matrixpositivstellensatz eine (andere, schwächere) homogene Version des Matrixpositivstellensatz, indem er das homogene Matrixpolynom bezüglich jeder Variable dehomogenisiert und den Matrixpositivstellensatz darauf anwendet und dann die Resultate „homogenisiert“ und aufaddiert, um die Positivität zu erhalten. Dies werden wir hier auch tun, jedoch mit einem etwas stärkeren Matrixpositivstellensatz und wir werden auch einen stärkeren homogenen Matrixpositivstellensatz erhalten, den Kummer erst in [Kum1, Korollar 4] und insbesondere nach Anwendung des reellen Nullstellensatzes bekommt. Den reellen Nullstellensatz können wir hier ganz vermeiden, jedoch um den Positivstellensatz kommen wir nicht herum.

Satz 2.25 (Homogener Matrixpositivstellensatz, [Kum1, Korollar 4]) Sei H ein homogenes positiv definites $(d \times d)$-Matrixpolynom. Dann gibt es ein homogenes, positiv definites $q \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$ und ein $Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times k}$ mit $qH = QQ^T$ und $\operatorname{im} Q = \left(\mathbb{R}[\underline{X}]^d\right)_{\geq e}$ für ein $e \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Sei $m \in 2\mathbb{N}_0$ der Grad von H (also der Grad des $(1,1)$-ten Eintrags von H). Die Matrixpolynome $H_i := H(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ sind für alle reellen Einsetzungen positiv definit, also gibt es nach dem Matrixpositivstellensatz Quadratsummen q_i und Matrixpolynome Q_i mit $q_i H_i = I_d + Q_i Q_i^T$. Wir haben also

- $H_i = H(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n)$,
- $R_i := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n]$,
- $q_i \in 1 + \sum R_i^2$,
- $l_i := \deg q_i \in 2\mathbb{N}_0$,
- $l := \max\{l_1, \ldots, l_n\}$
- $q_i H_i = I_d + Q_i Q_i^T$.

Wir „homogenisieren" nun die Gleichung $q_i H_i = I_d + Q_i Q_i^T$ und addieren die Ergebnisse auf. Um die Homogenität zu erreichen und um die Bedingung für das Bild eines gewünschten Qs zu erfüllen, müssen wir „auf einen höheren Grad homogenisieren".

Wähle also $e \in \mathbb{N}$ mit $e \geq n(m/2 + l/2 + d)$. Insbesondere findet man für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \geq e$ ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$X_i^{m/2+l/2+d} \text{ teilt } X^\alpha. \tag{$*$}$$

Dies wird uns nachher garantieren, dass $\operatorname{im} Q = (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e}$ gilt.

Nun „homogenisieren" wir. Definiere

- $\tilde{q}_i := X_i^l q_i \left(\frac{X_1}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right)$ und

- $\tilde{Q}_i := \begin{pmatrix} X_i^{m/2+l/2+0} & & & & \\ & X_i^{m/2+l/2+1} & & & \\ & & \ddots & & Q_i' \\ & & & X_i^{m/2+l/2+d-1} & \end{pmatrix}$, wobei

  $Q_i' := \left(X_i^{m/2+l/2+j-1} \cdot q_{j,a}^{(i)}\left(\frac{X_1}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right)\right)_{j,a}$ und $Q_i = (q_{j,a}^{(i)})_{j,a}$.

Also enthält die j-te Zeile von $\tilde{Q}_i$ Polynome, die homogen von Grad $m/2+l/2+j-1$ sind und es gilt

$$\tilde{q}_i H = \tilde{Q}_i \tilde{Q}_i^T.$$

Wähle $e' := e - m/2 - l/2$ und schreibe $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_M\} = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid |\alpha| = e'\}$. Setze

$$Q := \left(X^{\alpha_1}\tilde{Q}_1 \quad \cdots \quad X^{\alpha_M}\tilde{Q}_1 \quad \cdots\cdots \quad X^{\alpha_1}\tilde{Q}_n \quad \cdots \quad X^{\alpha_M}\tilde{Q}_n\right)$$

und

$$q := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{M} X^{2\alpha_j}\tilde{q}_i \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2.$$

Es gilt

$$qH = \sum_i \sum_j X^{2\alpha_j}\tilde{Q}_i\tilde{Q}_i^T = QQ^T$$

und wegen $(*)$ und der Konstruktion von Q, gilt $\operatorname{im} Q = (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e}$. □

Beispiel 2.26 Wir betrachten die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -Y \\ -Y & 2X^2 + Y^2 \end{pmatrix}.$$

Man kann hier natürlich schon ein Q mit $H = QQ^T$ ablesen, wir werden trotzdem eins ausrechnen. Später wird es sich herausstellen, dass diese Matrix eine Hermite-Matrix ist und wir werden sie als Beispiel wieder aufgreifen.

Wir müssen zuerst dehomogenisieren und erhalten die Matrizen

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2X^2 + 1 \end{pmatrix} \text{ und } H_2 = \begin{pmatrix} 2 & -Y \\ -Y & Y^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gehen wir wie in Satz 2.2 vor.

H_1: Es gilt

$$\det(H_1) = 4X^2 + 1 = I_1 + \begin{pmatrix} 2X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2X \end{pmatrix}^T,$$

also ist

$$2H_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ 2X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2X \end{pmatrix}^T$$

und

$$(2X^2+1)H_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2X^2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2X^2+1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 2X \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2X \\ 0 \end{pmatrix}^T.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} &\underbrace{(2X^2+3)}_{=:q_1} H_1 \\ &= I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2X \\ -1 & 2X & 2X^2+1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:Q_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2X \\ -1 & 2X & 2X^2+1 & 0 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

H_2: Es gilt

$$\det(H_2) = Y^2 + 4 = I_1 + \begin{pmatrix} Y & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

also ist

$$2H_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -Y \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{3} & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{3} & Y \end{pmatrix}^T$$

und

$$(Y^2+2)H_2 = \begin{pmatrix} -Y \\ Y^2+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Y \\ Y^2+2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \sqrt{3} & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} &\underbrace{(Y^2+4)}_{=:q_2} H_2 = I_2 \\ &+ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -Y & \sqrt{3} & Y \\ -Y & \sqrt{3} & Y & Y^2+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:Q_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -Y & \sqrt{3} & Y \\ -Y & \sqrt{3} & Y & Y^2+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Nun müssen wir wie in Satz 2.25 vorgehen, um H zu faktorisieren. Dazu „homogenisieren“ wir Q_1, Q_2 und q_1, q_2. Wir erhalten

- $\tilde{q}_1 = 2X^2 + 3Y^2$
- $\tilde{Q}_1 = \begin{pmatrix} Y & 0 & 2Y & 0 & -Y & 2X \\ 0 & Y^2 & -Y^2 & 2XY & 2X^2+Y^2 & 0 \end{pmatrix}$
- $\tilde{q}_2 = Y^2 + 4X^2$
- $\tilde{Q}_2 = \begin{pmatrix} X & 0 & 2X & 0 & 0 & -Y & \sqrt{3}X & Y \\ 0 & X^2 & -YX & \sqrt{3}X^2 & XY & Y^2+2X^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dann gilt

$$\underbrace{(X^2+Y^2)(\tilde{q}_1+\tilde{q}_2)}_{=:q} H = \underbrace{\begin{pmatrix} X\tilde{Q}_1 & Y\tilde{Q}_1 & X\tilde{Q}_2 & Y\tilde{Q}_2 \end{pmatrix}}_{=:Q} \begin{pmatrix} X\tilde{Q}_1 & Y\tilde{Q}_1 & X\tilde{Q}_2 & Y\tilde{Q}_2 \end{pmatrix}^T.$$

Es gilt $Q \in \mathbb{R}[X,Y]^{2\times 28}$, der Grad von q ist 3 und $\operatorname{im} Q = (\mathbb{R}[X,Y]^2)_{\geq 2}$. Das geht natürlich alles auch viel besser und zwar zum Beispiel

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -Y & \sqrt{2}X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -Y & \sqrt{2}X \end{pmatrix}^T.$$

§3 Symmetrisierung

Sei H die Hermite-Matrix und C die Begleitmatrix der Homogenisierung eines strikt rein reellen Polynoms p. Dann finden wir mit dem homogenen Matrixpositivstellensatz q und Q mit $qH = QQ^T$. In Kapitel 4 werden wir zeigen, dass es reicht ein symmetrisches lineares Matrixpolynom M mit $C^TQ = QM$ zu finden, um eine Determinantendarstellung eines Vielfachen von p zu finden. Ein Matrixpolynom mit $C^TQ = QM$ wird leicht zu finden sein. In diesem Kapitel werden wir Lemma 3.4 zeigen, mit dem man aus so einem Matrixpolynom ein symmetrisches Matrixpolynom N mit $C^TQ = QN$ bekommen wird.

Kummer verwendete hierfür [Kum1, Lemma 2] und [Bou, III.§7.2 Proposition 3] über das äußere Produkt von Moduln. Diese abstrakte Sprache wollen wir vermeiden, stattdessen werden wir über schiefsymmetrische Matrixpolynome reden und wir notieren mit $\mathrm{Skew}_d(\mathbb{R}[\underline{X}])$ den Raum der schiefsymmetrischen Elemente von $\mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$. Wir orientieren uns im Folgenden hauptsächlich an den Methoden aus [Con, Satz 2.19 und 5.5].

Definition 3.1 Seien M, N $\mathbb{R}[\underline{X}]$-Moduln und $b : M \times M \to N$ eine bilineare Abbildung, so heißt b *schiefsymmetrisch*, falls $b(v, w) = -b(w, v)$ für alle $v, w \in N$ gilt.

Folgendes Lemma dient als Ersatz für Lemma 2 aus [Kum1].

Lemma 3.2 (vergleiche [Kum1, Lemma 2]) Sei N ein $\mathbb{R}[\underline{X}]$-Modul und $e \in \mathbb{N}_0$. Sei $b : (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e} \times (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e} \to N$ eine bilineare schiefsymmetrische Abbildung und definiere

$$M := \mathrm{span}(vw^T - wv^T \mid v, w \in (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e}) \subseteq \mathrm{Skew}_d(\mathbb{R}[\underline{X}]).$$

Dann gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : M \to N$ mit

$$\forall v, w \in (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e} : f(vw^T - wv^T) = b(v, w).$$

Beweis. Die Menge

$$\{X^\alpha(e_ie_j^T - e_je_i^T) \mid i < j,\ |\alpha| + i + j - 2 \geq 2e\}$$

bildet eine $\mathbb{R}$-Basis von M. Wir können nun $f : M \to N$ auf dieser Basis definieren und zwar

$$f(X^\alpha(e_ie_j^T - e_je_i^T)) := b(X^{\alpha_1}e_i, X^{\alpha_2}e_j)$$

für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ und $|\alpha| + i + j - 2 \geq 2e$, $|\alpha_1| + i - 1 \geq e$, $|\alpha_2| + j - 1 \geq e$ und $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ mit $i < j$. Wegen der Bilinearität von b ist diese Definition unabhängig von der Wahl von α_1 und α_2. □

Lemma 3.3 ([Bou, III.§7.2 Proposition 3], vergleiche auch [Con, Satz 2.19 und 5.5]) Sei $Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d \times k}$ mit $\operatorname{im} Q = (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e}$. Dann hat die lineare Abbildung

$$\phi : \operatorname{Skew}_k(\mathbb{R}[\underline{X}]) \to \operatorname{Skew}_d(\mathbb{R}[\underline{X}]), \quad A \mapsto QAQ^T \qquad (A \in \operatorname{Skew}_k(\mathbb{R}[\underline{X}]))$$

Kern $L := \operatorname{span}(vw^T - wv^T \mid v \in \ker Q, w \in \mathbb{R}[\underline{X}]^k)$.

Beachte, dass hier der $\mathbb{R}$-Spann gleich dem $\mathbb{R}[\underline{X}]$-Spann ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $L \subseteq \ker \phi$. Sei $v \in \ker Q$ und $w \in \mathbb{R}[\underline{X}]^k$. Dann gilt

$$\phi(vw^T - wv^T) = Q(vw^T - wv^T)Q^T = \underbrace{Qv}_{=0}w^TQ^T - Qw(\underbrace{Qv}_{=0})^T = 0.$$

Um die andere Inklusion zu zeigen, reicht es, die Injektivität der induzierten Abbildung

$$\overline{\phi} : \operatorname{Skew}_k(\mathbb{R}[\underline{X}])/L \to \operatorname{Skew}_d(\mathbb{R}[\underline{X}]), \quad \overline{A} \mapsto QAQ^T$$

zu zeigen. Wir konstruieren dazu mit vorherigem Lemma eine linksinverse Abbildung. Betrachte die schiefsymmetrische bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} b : (\operatorname{im} Q) \times (\operatorname{im} Q) &\to \operatorname{Skew}_k(\mathbb{R}[\underline{X}])/L, \\ (Qv, Qw) &\mapsto \overline{vw^T - wv^T} \qquad (v, w \in \mathbb{R}[\underline{X}]^k). \end{aligned}$$

Es ist klar, dass b bilinear und schiefsymmetrisch ist. Es bleibt also nur die Wohldefiniertheit zu zeigen. Seien $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}[\underline{X}]^k$ mit $Qv_1 = Qv_2$ und $Qw_1 = Qw_2$.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
(v_1w_1^T - w_1v_1^T) - (v_2w_2^T - w_2v_2^T) &= \underbrace{v_1(\underbrace{w_1 - w_2}_{\in \ker Q})^T - (\underbrace{w_1 - w_2}_{\in \ker Q})v_1^T}_{\in L} \\
&\quad + v_1w_2^T - w_2v_1^T - (v_2w_2^T - w_2v_2^T) \\
&\equiv_L v_1w_2^T - w_2v_1^T - (v_2w_2^T - w_2v_2^T) \\
&= (\underbrace{v_1 - v_2}_{\in \ker Q})w_2^T - w_2(\underbrace{v_1 - v_2}_{\in \ker Q})^T \\
&\equiv_L 0.
\end{aligned}
$$

Also ist b wohldefiniert. Notiere

$$M := \operatorname{span}(vw^T - wv^T \mid v, w \in \operatorname{im} Q) \subseteq \operatorname{Skew}_d(\mathbb{R}[\underline{X}]).$$

Nach vorherigem Lemma gibt es also eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\psi : M \to \operatorname{Skew}_k(\mathbb{R}[\underline{X}])/L,$$

welche sich auf $\{vw^T - wv^T \mid v, w \in \operatorname{im} Q\}$ wie b auf $(\operatorname{im} Q) \times (\operatorname{im} Q)$ verhält. Wir zeigen nun noch $\psi \circ \overline{\phi} = \mathrm{id}$. Für $v_i, w_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]^k$ und $A = \sum_i (v_iw_i^T - w_iv_i^T)$ gilt

$$QAQ^T = Q\sum_i (v_iw_i^T - w_iv_i^T)Q^T = \sum_i (Qv_i(Qw_i)^T - Qw_i(Qv_i)^T) \in M,$$

also $\operatorname{im} \overline{\phi} = M$ und damit

$$
\begin{aligned}
\psi\left(\overline{\phi}\left(\overline{vw^T - wv^T}\right)\right) &= \psi(Qvw^TQ^T - Qwv^TQ^T) \\
&= \psi(Qv(Qw)^T - Qw(Qv)^T) \\
&= b(Qv, Qw) \\
&= \overline{vw^T - wv^T}
\end{aligned}
$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}[\underline{X}]^k$. Also ist $\overline{\phi}$ injektiv und ϕ hat Kern L. □

Lemma 3.4 ([Kum1, Bemerkung 4]) Sei $Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times k}$ und $A \in \operatorname{Skew}_k(\mathbb{R}[\underline{X}])$ mit $QAQ^T = 0$ und $\operatorname{im} Q = (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e}$. Dann gibt es $B \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{k\times k}$ mit $A = B - B^T$ und $QB = 0$.

Beweis. Die Matrix A ist im Kern von ϕ aus vorherigem Lemma, also gibt es $v_1, \dots, v_m \in \ker Q$ und $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]^k$ mit $A = \sum_{i=1}^m (v_i w_i^T - w_i v_i^T)$. Setze $B := \sum_{i=1}^m v_i w_i^T$. Dann gilt $\operatorname{im} B \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{R}[\underline{X}]}(v_1, \dots, v_m) \subseteq \ker Q$ und somit $QB = 0$. Weiter gilt auch

$$B - B^T = \sum_{i=1}^m v_i w_i^T - (\sum_{i=1}^m v_i w_i^T)^T = \sum_{i=1}^m v_i w_i^T - \sum_{i=1}^m w_i v_i^T = A.$$

$\square$

§4 Determinantendarstellungen

Sei in diesem Kapitel stets $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ ein strikt rein reelles Polynom von Grad d und $P \in \mathbb{R}[\underline{X}, T]$ dessen Homogenisierung. Sei $H \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ die Hermite-Matrix und $C \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ die Begleitmatrix von P. Der homogene Matrixpositivstellensatz 2.25 liefert die Existenz von $Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times k}$ und $q \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$ positiv definit und homogen mit

$$qH = QQ^T$$

und $\operatorname{im} Q = (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e}$ für bestimmte $e, k \in \mathbb{N}_0$. Fixiere solche e, k, Q und q.

In diesem Kapitel orientieren wir uns an [NPT] und [Kum1]. Zuerst zeigen wir mit Methoden aus [NPT], dass es genügt ein LGS zu lösen, um eine Determinantendarstellung eines Vielfachen eines strikt rein reellen Polynoms zu finden. Danach benutzen wir Methoden aus [Kum1], um die Lösbarkeit dieses LGS zu zeigen, hierbei verwenden wir aber wie in [NPT] die Hermite-Matrix anstatt der Bézout-Matrix, die in [Kum1] verwendet wurde. Ziel dieser Arbeit ist es, folgendes Resultat zu zeigen.

Satz 4.1 (Satz von Kummer, [Kum1, Satz 6]) Es gibt ein $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ und symmetrische Matrizen $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{k\times k}$ mit

$$pf = \det(I + X_1A_1 + \ldots + X_nA_n).$$

Bemerkung 4.2 Da die rechte Seite der Gleichung rein reell ist, ist f automatisch auch rein reell.

Definition 4.3 Sei $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. Schreibe $\mathrm{Z}(f)$ für die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

der reellen Nullstellen von f.

Proposition 4.4 ([Lam, Lemma 6.14]) Sei $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ mit $\mathrm{Z}(p) \subseteq \mathrm{Z}(f)$. Dann wird f von p geteilt.

Das heißt, dass das von p erzeugte Ideal reell ist.

Beweis. Es ist p quadratfrei, denn sonst hätte $p(Ta)$ für mindestens ein $a \in \mathbb{R}^n$ eine doppelte Nullstelle. Sei p nun Œ irreduzibel.

Dies geht, denn wir können p als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben, wenn dann jeder dieser Faktoren f teilt, so wird f auch von p geteilt, da in der Primfaktorzerlegung jeder Faktor höchstens einmal vorkommt (p quadratfrei). Außerdem sind Teiler von (strikt) rein reellen Polynomen wieder (strikt) rein reell.

Nehme an, dass f nicht von p in $\mathbb{R}[\underline{X}]$ geteilt wird. Betrachte nun p und f als univariate Polynome in $\mathbb{R}(X_2, \dots, X_n)[X_1]$. Dort wird f auch nicht von p geteilt, denn gäbe es $h \in \mathbb{R}(X_2, \dots, X_n)[X_1]$ mit $ph = f$, so wäre $h \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ nach dem Lemma von Gauß (siehe zum Beispiel [Sch, Korollar I.4.10]). Weiter ist p auch in $\mathbb{R}(X_2, \dots, X_n)[X_1]$ irreduzibel, also gilt $\gcd(p, f) = 1$ in $\mathbb{R}(X_2, \dots, X_n)[X_1]$ (beachte, $\mathbb{R}(X_2, \dots, X_n)[X_1]$ ist ein Hauptidealring). Wähle $g, \tilde{g} \in \mathbb{R}(X_2, \dots, X_n)[X_1]$ mit $1 = \tilde{g}p + gf$. Multipliziert man nun mit einem Hauptnenner $h \in \mathbb{R}[X_2, \dots, X_n]$, so erhält man $g_1, \tilde{g}_1 \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ mit

$$0 \neq h = \tilde{g}_1 p + g_1 f.$$

Da p strikt rein reell ist, gibt es (eventuell nach einem Koordinatenwechsel) $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$b < a < c \text{ und } p(be_1) < 0 = p(ae_1) < p(ce_1).$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine Umgebung der 0 mit

$$\forall u \in U : p(b, u) < 0 < p(c, u).$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es für jedes $u \in U$ ein $a_u \in \mathbb{R}$ mit

$$p(a_u, u) = 0.$$

Es gilt für alle $u \in U$

$$h(u) = \tilde{g}_1(a_u, u) \underbrace{p(a_u, u)}_{=0} + g_1(a_u, u) \underbrace{f(a_u, u)}_{=0, \text{ da } \mathrm{Z}(p) \subseteq \mathrm{Z}(f)} = 0.$$

Dies kann nicht sein, da U in $\mathbb{R}^{n-1}$ nicht-leeres Inneres hat und $h \neq 0$ nur von den Variablen $X_2, \dots, X_n$ abhängt. $\square$

Lemma 4.5 ([NPT, Lemma 2.3]) Die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k,\ v \mapsto Q^T(a)v$$

ist für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ injektiv.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^d$ mit $Q^T(a)v = 0$. Dann gilt

$$v^T q(a)H(a)v = v^T Q(a)Q^T(a)v = 0.$$

Da H nach Proposition 1.31 pd ist, ist auch qH pd ($q > 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), also gilt $v = 0$. □

Lemma 4.6 (Hanselka, [GKVW, Lemma 4.3]) Sei $A \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ ein symmetrisches Matrixpolynom. Wenn $\chi_A = \det(TI_d - A) \in \mathbb{R}[\underline{X}, T]$ höchstens Grad d hat, dann ist A linear (aufgefasst als Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{R}^{d\times d}$ und in den Variablen $\underline{X}$). Beachte, dass die Umkehrung auch gilt.

Beweis. In [Saw, Satz 2.16] beziehungsweise [GKVW, Lemma 4.3] steht dieses Lemma für eine Variable, wir verallgemeinern dies mit einem Trick, der zum Beispiel bei [S2, Proposition 2.2.5] angewandt wird.

Habe also χ_A höchstens Grad d und gelte Œ $A \neq 0$. Schreibe $A = \sum_{i=0}^{e} A_i$, wobei $A_i \in (\mathbb{R}[\underline{X}]_i)^{d\times d}$ und $A_e \neq 0$ gilt. Wir wollen also $e \leq 1$ zeigen. Wähle $a \in \mathbb{R}^n$ mit $A_e(a) \neq 0$. Dann hat das symmetrische Matrixpolynom $A(Ta) \in \mathbb{R}[T]^{d\times d}$ Grad e und ist nach [Saw, Satz 2.16] oder [GKVW, Lemma 4.3] linear, denn $e \leq d$ nach Voraussetzung. Also ist A auch linear. □

Um Intuition für den nächsten Satz zu bekommen, nehme an, dass Q quadratisch und über $\mathbb{R}[\underline{X}]$ invertierbar ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} C^T H = HC &\iff C^T QQ^T = QQ^T C \\ &\iff Q^{-1}C^T Q = Q^T C (Q^T)^{-1} = (Q^{-1}C^T Q)^T. \end{aligned}$$

Also ist $Q^{-1}C^T Q \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{d\times d}$ symmetrisch und es gilt

$$P = \chi_C = \det(TI_d - C^T) = \det(TI_d - Q^{-1}C^T Q).$$

Dann ist $Q^{-1}C^T Q$ nach vorherigem Lemma ein lineares Matrixpolynom und wir erhalten eine Determinantendarstellung

$$p = P(\underline{X}, 1) = \det(I_d - Q^{-1}C^T Q).$$

Da aber bei uns weder Q invertierbar noch quadratisch ist, nehmen wir einfach ein M mit $QM = C^T Q$, das heißt wir stellen quasi die Gleichung $M = Q^{-1}C^T Q$ um und erhoffen uns, dass eine Lösung existiert. Wenn diese existiert, so bekommen wir eine Determinantendarstellung, jedoch leider eventuell nur von einem Vielfachen unseres strikt rein reellen Polynoms.

Satz 4.7 ([NPT, Satz 2.5]) Gibt es ein lineares symmetrisches Matrixpolynom $M \in (\mathbb{R}[\underline{X}]_1)^{k\times k}$ mit

$$QM = C^T Q,$$

so wird $\det(I_k - M)$ von p geteilt.

Beweis. Setze $f := \det(I_k - M) \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. Wir wollen Proposition 4.4 anwenden. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ eine Nullstelle von p und damit $(a, 1)$ auch eine Nullstelle der Homogenisierung $P = \chi_C$ von p. Also ist 1 ein Eigenwert von $C(a)$.

Wegen Lemma 4.5 ist $Q^T(a)$ injektiv. Also liefert uns die Gleichung $QM = C^T Q$ folgendes kommutatives Diagramm durch Transponieren und a Einsetzen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^k \arrow[r, "M(a)"] & \mathbb{R}^k \\
\mathbb{R}^d \arrow[u, hook, "Q^T(a)"] \arrow[r, "C(a)"] & \mathbb{R}^d \arrow[u, hook, "Q^T(a)"']
\end{tikzcd}$$

Somit sind insbesondere die Eigenwerte von $C(a)$ auch Eigenwerte von $M(a)$. Das heißt aber, dass $M(a)$ den Eigenwert 1 besitzt, also $f(a) = \det(I_k - M(a)) = 0$. Mit Proposition 4.4 folgt nun, dass f von p geteilt wird. $\square$

Bemerkung 4.8 Das heißt, um eine Determinantendarstellung eines Vielfachen eines rein reellen Polynoms zu finden, reicht es zuerst ein SDP zu lösen, um Q zu bekommen (vergleiche Bemerkung 2.8 und Proposition 2.9) und dann das LGS, welches durch Koeffizientenvergleich in $\underline{X}$ aus der Gleichung $QM = C^T Q$ entsteht, zu lösen (die Variablen des LGS sind Parameter, mit denen wir M parametrisieren).

Vergleiche zum Parametrisieren von M das Beispiel 4.15.

Das folgende Lemma wurde in [Kum1] verwendet, dort wurde etwas mehr mit Graduierungen gearbeitet, was dieses Lemma dadurch trivial macht.

Lemma 4.9 Gibt es ein symmetrisches (nicht notwendigerweise lineares) Matrixpolynom $M = \sum_{i=0}^{b} M_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{k\times k}$ mit $M_i \in (\mathbb{R}[\underline{X}]_i)^{k\times k}$ und

$$QM = C^T Q,$$

dann wird $\det(I_k - M_1)$ von p geteilt.

Beweis. Wir untersuchen die Gradstruktur der Einträge von Q, M und C, sowie deren Produkte und stellen dann fest, dass nur die Grad 1 Terme von M etwas zu der Gleichung $QM = C^T Q$ beitragen.

Schreibe $C = (c_{i,j})_{i,j}$, $H = (h_{i,j})_{i,j}$ und $Q^T = (q_{i,j})_{i,j}$. Sei $2r = \deg q$. Es gilt

$$qh_{i,i} = \sum_{j=1}^{k} q_{j,i} q_{j,i} = \sum_{j=1}^{k} q_{j,i}^2,$$

also ist $q_{j,i}$ eine $(r+i-1)$-Form, da $h_{i,i}$ eine $(2i-2)$-Form ist (siehe zum Beispiel [S2, Bemerkung 2.2.4(c)]). Für die Einträge $c_{i,j}$ von C gilt:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= 1, && \text{falls } i-1 = j < d,\\ c_{i,j} &= 0, && \text{falls } i-1 \neq j < d,\\ c_{i,d} &\text{ ist eine } (d-i+1)\text{-Form.} \end{aligned}$$

Also haben wir

$$(Q^T C)_{i,j} = \sum_{l=1}^{d} q_{i,l} c_{l,j} = q_{i,j+1} \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{r+j}$$

für $j < d$ und

$$(Q^T C)_{i,d} = \sum_{l=1}^{d} q_{i,l} c_{l,j} = \sum_{l=1}^{d} \underbrace{q_{i,l} c_{l,d}}_{\in \mathbb{R}[\underline{X}]_{r+l-1} \cdot \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-l+1}} \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{r+d}.$$

Somit gilt

$$(MQ^T)_{i,j} = (Q^T C)_{i,j} \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{r+j}$$

für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und $j \in \{1, \dots, d\}$.

Durch Vergleich der Grade sehen wir im Folgenden

$$M_1 Q^T = MQ^T.$$

Schreibe $M_i = (m_{l,j}^{(i)})_{l,j} \in (\mathbb{R}[\underline{X}]_i)^{k \times k}$. Es gilt

$$\mathbb{R}[\underline{X}]_{r+j} \ni (MQ^T)_{i,j} = \sum_{l=1}^{k} m_{i,l} q_{l,j} = \sum_{a=0}^{e} \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \underbrace{m_{i,l}^{(a)} q_{l,j}}_{\in \mathbb{R}[\underline{X}]_a \cdot \mathbb{R}[\underline{X}]_{r+j-1}}}_{\in \mathbb{R}[\underline{X}]_{a+r+j-1}}$$

und somit

$$\sum_{l=1}^{k} m_{i,l}^{(a)} q_{l,j} = 0 \text{ für alle } a \neq 1.$$

Also $\sum_{i=0, i \neq 1}^{e} M_i Q^T = 0$ und damit $Q^T C = MQ^T = M_1 Q^T$.

Da M_1 auch symmetrisch ist, folgt die Behauptung nun aus vorherigem Satz. □

Bemerkung 4.10 Das vorherige Lemma würde sogar auch gelten, wenn p ein quadratfreies rein reelles Polynom wäre. Für einen Beweis siehe [NPT] und kopiere den Beweis des Lemmas.

Lemma 4.11 ([Kum1, Beweis von Satz 3]) Gibt es ein (nicht notwendigerweise symmetrisches und lineares) Matrixpolynom $M \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{k \times k}$ mit

$$QM = C^T Q, \tag{$*$}$$

dann gibt es ein symmetrisches Matrixpolynom $N \in (\mathbb{R}[\underline{X}]_1)^{k \times k}$ derart, dass $\det(I_k - N)$ von p geteilt wird.

Beweis. Nach vorherigem Lemma genügt es, zu zeigen, dass es auch ein symmetrisches Matrixpolynom M' mit $QM' = C^T Q$ gibt.

Betrachte das schiefsymmetrische Matrixpolynom $S := M - M^T$. Wir wollen Lemma 3.4 auf S und Q anwenden. Dafür müssen wir $QSQ^T = 0$ zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} QSQ^T &= Q(M - M^T)Q^T \\ &= QMQ^T - QM^TQ^T \\ &= QMQ^T - Q(QM)^T \\ &\overset{(*)}{=} C^TQQ^T - Q(C^TQ)^T \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C^T QQ^T - QQ^T C \\
&= C^T qH - qHC \\
&= q(C^T H - HC) \\
&\overset{1.35}{=} q \cdot 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Somit gibt es nach Lemma 3.4 ein $B \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{k\times k}$ mit $QB = 0$ und $S = B - B^T$. Setze $M' := M - B$. Wegen

$$M' - M'^T = (M - B) - (M - B)^T = (M - M^T) - (B - B^T) = S - S = 0$$

ist M' symmetrisch und wegen $QB = 0$ ist

$$QM' = QM - QB = QM = C^T Q.$$

□

Beweis von Satz 4.1. Für unser Hauptresultat müssen wir also nur zeigen, dass es ein Matrixpolynom M mit $QM = C^T Q$ gibt.

Wir zeigen zuerst, dass $\operatorname{im} Q$ C^T-invariant ist, dafür müssen wir $\operatorname{im}(C^T Q) \subseteq \operatorname{im} Q$ zeigen.

Sei $v \in \mathbb{R}[\underline{X}]^k$. Schreibe $Q = (q_{i,j})_{i,j}$ und $C = (c_{i,j})_{i,j}$. Es gilt $q_{i,j} \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{\geq e+i-1}$, denn $\operatorname{im} Q = (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e}$. Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
(C^T Qv)_j &= \sum_{i=1}^{k} (C^T Q)_{j,i} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{d} c_{l,j} q_{l,i} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{q_{j+1,i}}_{\in \mathbb{R}[\underline{X}]_{e+j}} v_i && \text{, falls } j < d. \\
&= \sum_{l=1}^{d} \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\underbrace{c_{l,j}}_{\in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-l+1}} \underbrace{q_{l,i}}_{\in \mathbb{R}[\underline{X}]_{\geq e+l-1}}}_{\in \mathbb{R}[\underline{X}]_{\geq e+d}} v_i && \text{, falls } j = d.
\end{aligned}
$$

Also ist $(C^TQv)_j \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{\geq e+j}$ und somit insbesondere $C^TQv \in (\mathbb{R}[\underline{X}]^d)_{\geq e} = \operatorname{im} Q$.

Da $\operatorname{im} Q$ somit C^T-invariant ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{k \times k}$ mit $QM = C^TQ$. Nun sind wir in der Situation von Lemma 4.11 und die Existenz von symmetrischen Matrizen $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{k \times k}$ derart, dass $\det(I_k + X_1A_1 + \ldots + X_nA_n)$ von p geteilt wird folgt. $\square$

Bemerkung 4.12 In obigem Beweis haben wir also gezeigt, dass das LGS aus Bemerkung 4.8 stets eine Lösung besitzt.

Bemerkung 4.13 ([Kum2, Bemerkung 5.3.7]) Könnten wir zeigen, dass die Koeffizienten (und der Grad) des Kofaktors q durch eine nur von n und d abhängige Konstante beschränkt sind, so könnte man das Resultat auch für rein reelle Polynome verallgemeinern, die nicht strikt rein reell sind. Eine Gradschranke ist mit dem Endlichkeitssatz (zum Beispiel [S2, Satz 5.4.1]) und einer Verallgemeinerung des Satzes von Kummer für reell abgeschlossene Körper beweisbar, sprengt hier aber den Rahmen (vergleiche auch [Kum2, Bemerkung 5.3.6]).

Nuij [Nui] stellte fest, dass die Menge der strikt rein reellen Polynome von Grad kleiner gleich d dicht in der Menge der rein reellen Polynome von Grad kleiner gleich d liegt. Also können wir zu einem rein reellen Polynom $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ von Grad d eine Folge $(p_m)_m$ von strikt rein reellen Polynomen von Grad kleiner gleich d finden mit $\lim_{m\to\infty} p_m = p$.

Nehme nun an, dass wir eine Schranke, wie oben haben. Nach dem Satz oben gibt es Polynome $q_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ von beschränktem Grad derart, dass p_mq_m eine Determinantendarstellung besitzt. Da die Folge $(q_m)_m$ beschränkt ist, können wir Œ annehmen, dass sie konvergent ist. Sei also $q := \lim_{m\to\infty} q_m$. Dann besitzt aber pq nach folgender Proposition eine Determinantendarstellung.

Proposition 4.14 ([GKVW, Beweis von Satz 4.1]) Sei

$$p_m = \det(I_d + X_1A_1^{(m)} + \ldots + X_nA_n^{(m)})$$

eine Folge von Polynomen von Grad kleiner gleich d mit Determinantendarstellung ($A_1^{(m)}, \ldots, A_n^{(m)} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch) und mit Grenzwert p. Dann hat p auch eine Determinantendarstellung.

Beweis. Sei

$$\mu := \min\{|t| \mid t \in \mathbb{R}, p(t,0,\ldots,0)p(0,t,0,\ldots,0)\cdot\ldots\cdot p(0,\ldots,0,t) = 0\}.$$

Das Minimum $\mu > 0$ existiert, denn $p(T, 0, \ldots, 0) \cdot \ldots \cdot p(0, \ldots, 0, T) \in \mathbb{R}[T]$ hat nur Nullstellen ungleich 0. Da $\lim_{m\to\infty} p_m = p$, konvergiert $\chi_{A_i^{(m)}} \in \mathbb{R}[T]$ gegen das Polynom $T^d p(0, \ldots, 0, \frac{1}{T}, 0, \ldots, 0)$, wobei $\frac{1}{T}$ im i-ten Eintrag steht. Also sind für große m alle Eigenwerte von $A_i^{(m)}$ in dem Intervall $(-2\mu^{-1}, 2\mu^{-1})$. Da aber die Operatornorm einer symmetrischen Matrix gleich dem Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts ist, sind also die Folgen $(A_i^{(m)})_m$ beschränkt und somit Œ konvergent. Sei also $A_i := \lim_{m\to\infty} A_i^{(m)}$. Dann gilt wie gewünscht

$$p = \det(I_d + X_1 A_1 + \ldots + X_n A_n).$$

$\square$

Beispiel 4.15 Betrachte das Polynom

$$p := 1 - X^2 - Y^2 - Z^2,$$

welches eine Kugel definiert. Die Homogenisierung von p ist

$$P := T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$$

und somit sind die ersten beiden Potenzen der Begleitmatrix von P

$$C = \begin{pmatrix} 0 & X^2+Y^2+Z^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C^2 = \begin{pmatrix} X^2+Y^2+Z^2 & 0 \\ 0 & X^2+Y^2+Z^2 \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen als Hermite-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2X^2+2Y^2+2Z^2 \end{pmatrix}.$$

Eine mögliche Faktorisierung ist

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & Y & Z \end{pmatrix}$$
$$q := \frac{1}{2},$$

denn dann gilt

$$qH = QQ^T$$

und $\operatorname{im} Q = \operatorname{span}_{\mathbb{R}[X,Y,Z]}(e_1, Xe_2, Ye_2, Ze_2) = (\mathbb{R}[X,Y,Z]^2)_{\geq 0}$.

Betrachte

$$M_X := \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_2 & X_5 & X_6 & X_7 \\ X_3 & X_6 & X_8 & X_9 \\ X_4 & X_7 & X_9 & X_{10} \end{pmatrix}$$

$$M_Y := \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Y_2 & Y_5 & Y_6 & Y_7 \\ Y_3 & Y_6 & Y_8 & Y_9 \\ Y_4 & Y_7 & Y_9 & Y_{10} \end{pmatrix}$$

$$M_Z := \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_2 & Z_5 & Z_6 & Z_7 \\ Z_3 & Z_6 & Z_8 & Z_9 \\ Z_4 & Z_7 & Z_9 & Z_{10} \end{pmatrix}$$

und die Gleichung

$$Q(XM_X + YM_Y + ZM_Z) = C^T Q.$$

Koeffizientenvergleich in X, Y, Z liefert ein LGS, welches als Lösung zum Beispiel

$$M := \begin{pmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 \\ Z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Es gilt hier sogar

$$\det(I_4 - M) = \det \begin{pmatrix} 1 & -X & -Y & -Z \\ -X & 1 & 0 & 0 \\ -Y & 0 & 1 & 0 \\ -Z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - X^2 - Y^2 - Z^2 = p.$$

Beispiel 4.16 In diesem Beispiel betrachten wir das Polynom

$$p := 1 + Y - X^2$$

und dessen Homogenisierung

$$P = T^2 + YT - X^2.$$

Die Begleitmatrix von P ist

$$C = \begin{pmatrix} 0 & X^2 \\ 1 & -Y \end{pmatrix}$$

und ihr Quadrat

$$C^2 = \begin{pmatrix} X^2 & -X^2Y \\ -Y & X^2 + Y^2 \end{pmatrix}.$$

Als Hermite-Matrix erhalten wir somit

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -Y \\ -Y & 2X^2 + Y^2 \end{pmatrix}.$$

In Beispiel 2.26 haben wir schon gesehen, dass

$$H = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -Y & \sqrt{2}X \end{pmatrix}}_{=:Q} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -Y & \sqrt{2}X \end{pmatrix}^T.$$

Wir wollen nun ein LGS aufstellen und es lösen. Dazu rechnen wir erstmal

$$C^TQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ X^2 & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -Y & \sqrt{2}X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -Y & \sqrt{2}X \\ X^2 & X^2 + Y^2 & -\sqrt{2}XY \end{pmatrix}$$

und setzen

$$M_X := \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ T_2 & T_4 & T_5 \\ T_3 & T_5 & T_6 \end{pmatrix}$$

und

$$M_Y := \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z_2 & Z_4 & Z_5 \\ Z_3 & Z_5 & Z_6 \end{pmatrix}.$$

Dann bekommt man durch Koeffizientenvergleich (in den Variablen X und Y) in der Gleichung

$$XQM_X + YQM_Y = C^TQ$$

ein LGS mit zum Beispiel

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}X \\ 0 & -Y & \frac{\sqrt{2}}{2}X \\ \frac{\sqrt{2}}{2}X & \frac{\sqrt{2}}{2}X & -\frac{1}{2}Y \end{pmatrix}$$

als Lösung. Wir erhalten

$$\frac{1}{2}(Y+2)p = \det(I_3 - M).$$

Es gilt

$$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}Y+1\right) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -2\}$$

und $\mathrm{C}(p)$ sind alle Punkte, die auf der um 1 nach unten verschobenen Normalparabel oder darüber liegen. Also gilt $\mathrm{C}(p) \subseteq \mathrm{C}(\frac{1}{2}Y+1)$. Mit Proposition 1.17 ist dann $\mathrm{C}(p)$ ein Spektraeder, welcher durch die lineare Matrixungleichung

$$I_3 - M \succeq 0$$

beschrieben wird.

§5 Nichtlineare Determinantendarstellungen

Sei in diesem Kapitel stets $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ ein strikt rein reelles Polynom von Grad d und $P \in \mathbb{R}[\underline{X}, T]$ die Homogenisierung von p. Sei weiter $f := P(1, X_2, \ldots, X_n, T)$, sowie $C \in \mathbb{R}[X_2, \ldots, X_n]^{d \times d}$ die Begleitmatrix und $H \in \mathbb{R}[X_2, \ldots, X_n]^{d \times d}$ die Hermite-Matrix von f. Aus Proposition 1.31 folgt direkt, dass $H(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ pd ist. Also gibt es nach dem Matrixpositivstellensatz 2.2 ein $q \in \sum \mathbb{R}[X_2, \ldots, X_n]^2$ und ein $Q \in \mathbb{R}[X_2, \ldots, X_n]^{k \times d}$ mit $qH = I_d + Q^T Q$.

In diesem Kapitel werden wir einen Ansatz aus [Kum3] ausprobieren, der aber leider nicht erfolgreich war. Wir werden f als charakteristisches Polynom eines (nicht notwendigerweise linearen) Matrixpolynoms schreiben. Aus dieser Darstellung lässt sich jedoch leider keine Determinantendarstellung von p gewinnen, falls das symmetrische Matrixpolynom (dessen charakteristisches Polynom f ist) nicht linear ist.

Aus dem Matrixpolynom ein lineares Matrixpolynom zu bekommen, funktioniert nicht einfach durch trunkieren, wie wir zeigen werden. Außerdem zeigen wir, dass dieses Matrixpolynom nicht automatisch linear ist und wir bemerken, wieso man dies hätte hoffen können.

Satz 5.1 ([Kum3, Satz 4.1]) Es gibt ein symmetrisches Matrixpolynom $M \in \mathbb{R}[X_2, \ldots, X_n]^{l \times l}$ mit $MQ' = Q'C$ und so, dass $\chi_M = \det(TI_l - M)$ von f geteilt wird, hierbei ist $Q' := \begin{pmatrix} I_d \\ Q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[X_2, \ldots, X_n]^{l \times d}$ und $l := k + d$.

Beweis. Definiere

$$M := \begin{pmatrix} C^T - Q^T QC & C^T Q^T \\ QC & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[X_2, \ldots, X_n]^{l \times l}.$$

Dann ist M symmetrisch und es gilt $MQ' = Q'C$ (benutze bei beidem, dass $HC = C^T H$ und $qH = I_d + Q^T Q$ gilt):

$$\begin{aligned} MQ' &= \begin{pmatrix} C^T - Q^T QC + C^T Q^T Q \\ QC \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -Q^T QC + C^T (Q^T Q + I_d) \\ QC \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -Q^T QC + (Q^T Q + I_d) C \\ QC \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C \\ QC \end{pmatrix} \\ &= Q'C \end{aligned}$$

und

$$M^T = \begin{pmatrix} C - C^T Q^T Q & C^T Q^T \\ QC & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T - Q^T QC & C^T Q^T \\ QC & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Definiere $M' := \begin{pmatrix} C^T & 0 \\ QC & -QCQ^T \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} I_d & -Q^T \\ 0 & I_k \end{pmatrix} M' \begin{pmatrix} I_d & Q^T \\ 0 & I_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_d & -Q^T \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^T & C^T Q^T \\ QC & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Also ist

$$\det(TI_{d+k} - M) = \det(TI_{d+k} - M') = f \cdot \det(TI_k + QCQ^T).$$

□

Lemma 4.6 lässt sich leider hier nicht anwenden, denn der Grad des charakteristischen Polynoms von M kann größer als $d + k$ sein. In folgendem Beispiel werden wir sehen, dass man im Allgemeinen keine lineare Darstellung bekommt.

Beispiel 5.2 Betrachte $1 - X^2 - Y^2 \in \mathbb{R}[X, Y]$. Dann gilt $P = T^2 - X^2 - Y^2$ und $f = T^2 - Y^2 - 1$. Die Begleitmatrix von f ist

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 + Y^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Hermite-Matrix ist

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2+2Y^2 \end{pmatrix}.$$

Nun werden wir H so faktorisieren, dass wir einen polynomialen Nenner haben. Betrachte also

$$q := \frac{1}{2}(1+Y^2)$$
$$Q := \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & \sqrt{2}Y \\ 0 & Y^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$qH = \begin{pmatrix} 1+Y^2 & 0 \\ 0 & 1+2Y^2+Y^4 \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} Y^2 & 0 \\ 0 & 2Y^2+Y^4 \end{pmatrix} = I_2 + Q^T Q.$$

Dann ist

$$QC = \begin{pmatrix} 0 & Y+Y^3 \\ \sqrt{2}Y & 0 \\ Y^2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$Q^T QC = \begin{pmatrix} 0 & Y^2+Y^4 \\ 2Y^2+Y^4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C^T - Q^T QC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+Y^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Y^2+Y^4 \\ 2Y^2+Y^4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1-Y^2-Y^4 \\ 1-Y^2-Y^4 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$M = \begin{pmatrix} C^T - Q^T QC & C^T Q^T \\ QC & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1-Y^2-Y^4 & 0 & \sqrt{2}Y & Y^2 \\ 1-Y^2-Y^4 & 0 & Y+Y^3 & 0 & 0 \\ 0 & Y+Y^3 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$f \text{ teilt } \det(TI_5 - M)$$

nach obigem Satz. Offensichtlich ist jedoch M nicht linear, das heißt insbesondere, dass $\det(TI_5 - M)$ mindestens Grad 6 hat. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}&\det(TI_5 - M)\\&= -T^3Y^8 + TY^{10} - 3T^3Y^6 + 4TY^8 - 2T^3Y^4 + 5TY^6 + T^5 - T^3Y^2 + 2TY^4 - T^3\end{aligned}$$

von Grad 11.

Als wir anstatt f die Homogenisierung P von p angeschaut haben, konnten wir einfach M trunkieren (siehe Lemma 4.9) und haben so eine lineare Determinantendarstellung bekommen, dies geht hier jetzt aber nicht mehr. Wir müssen also

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \sqrt{2}Y & 0 \\ 1 & 0 & Y & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

betrachten. Es gilt weiter

$$\begin{aligned}\chi_{M_1} = \det&\begin{pmatrix} T & 1 & 0 & \sqrt{2}Y & 0 \\ 1 & T & Y & 0 & 0 \\ 0 & Y & T & 0 & 0 \\ \sqrt{2}Y & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{pmatrix}\\ &= T^5 - 3T^3Y^2 + 2TY^4 - T^3.\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass f nicht χ_{M_1} teilt, rechnen wir nach, dass $(\sqrt{2}, 1)$ eine Nullstelle von f, aber keine von χ_{M_1} ist. In der Tat:

$$f(\sqrt{2}, 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 - 1 = 0$$

und

$$\chi_{M_1}(\sqrt{2}, 1) = (\sqrt{2})^5 - 3(\sqrt{2})^3 + 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3 = 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

Bemerkung 5.3 Hätten wir $H = I_2 + Q^T Q$ wie am Ende von Beispiel 2.7 mit

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}Y \end{pmatrix}$$

faktorisiert (setze X auf 0 in der Darstellung von 2.7), so hätten wir ein lineares M und somit eine (lineare) Determinantendarstellung von p bekommen.

Literaturverzeichnis

[Bou] Bourbaki, N.: Elements of Mathematics Algebra I. Springer, Berlin (1989).

[Brä] P. Brändén: Obstructions to determinantal representability, Adv. Math. 226 (2011), no. 2, 1202–1212; https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.08.003

[Con] Conrad, K.: Tensor Products II (Skript, Stand: 10.8.2022). https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/tensorprod2.pdf

[Eis] Eisenbud, D.: Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry. Springer New York, 1995. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5350-1

[Går] Gårding, L.: An Inequality for Hyperbolic Polynomials. Journal of Mathematics and Mechanics, 8(6), 957–965 (1959). http://www.jstor.org/stable/24900665

[GKVW] Grinshpan, A., Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, D.S., Vinnikov, V., Woerdeman, H.J.: Stable and real-zero polynomials in two variables. Multidim Syst Sign Process 27, 1–26 (2016). https://doi.org/10.1007/s11045-014-0286-3

[HN] Helton, J.W., Nie, J.: Semidefinite representation of convex sets. Math. Program. 122, 21–64 (2010). https://doi.org/10.1007/s10107-008-0240-y

[HS] Hanselka, C., Schweighofer, M.: Positive semidefinite matrix polynomials. Unveröffentlicht.

[HV] Helton, J.W.; Vinnikov, V.: Linear matrix inequality representation of sets, Comm. Pure Appl. Math. 60 (2007), no. 5, 654–674.

[Kal] Kalman, D.: A Matrix Proof of Newton's Identities. Mathematics Magazine, 73(4), 313–315 (2000). https://doi.org/10.2307/2690982

[Kri] Krivine, J.-L.: Anneaux préordonnés, J. Analyse Math. 12, 1964, 307–326.

[Kum1] Kummer, M.: Determinantal representations and Bézoutians. Math. Z. 285, 445–459 (2017). https://doi.org/10.1007/s00209-016-1715-9

[Kum2] Kummer, M.: From Hyperbolic Polynomials to Real Fibered Morphisms [Dissertation]. Konstanz: University of Konstanz (2016). https://kops.uni-konstanz.de/handle/123456789/34865

[Kum3] Kummer, M.: Eigenvalues of Symmetric Matrices over Integral Domains. J. Algebra, (466), 195-203, 2016. http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.07.024

[Lam] Lam, T. Y.: An Introduction to Real Algebra. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 14, no. 4, 1984, pp. 767–814. JSTOR, http://www.jstor.org/stable/44236847.

[Lax] Lax, P. D.: Differential equations, difference equations and matrix theory. Communications on Pure and Applied Mathematics, 6:175–194, 1958.

[Mac] Macdonald, I. G.: Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1995.

[NPT] Netzer, T.; Plaumann, D. und Thom, A.: Determinantal representations and the Hermite matrix. In: The Michigan Mathematical Journal. 62(2), pp. 407-420 (2013). https://arxiv.org/abs/1108.4380

[Nui] Nuij, W.: A note on hyperbolic polynomials. Mathematica Scandinavica, 23, 69–72 (1968).

[S1] Schweighofer, M.: Spectrahedral relaxations of hyperbolicity cones. Preprint. https://arxiv.org/abs/1907.13611

[S2] Schweighofer, M.: Lecture Notes on Real Algebraic Geometry, Positivity and Convexity. `https://arxiv.org/abs/2205.04211` (Stand: 10.5.2022)

[S3] Schweighofer, M.: Gespräch am 10.10.2022

[Saw] Sawall, D.: Hermitesche Determinantendarstellungen rein reeller Polynome, Bachelorarbeit an der Universität Konstanz (2020).

[Sch] Scheiderer, C.: Algebra I (Universität Konstanz, Vorlesungsskript, Stand: 2022).

[Ste] Stengle, G.: A nullstellensatz and a positivstellensatz in semialgebraic geometry, Math. Ann. 207 (1974), 87–97.