Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 1

Abgabe: Dienstag, 28. Oktober 2014

Aufgabe 0

Installieren Sie das frei erhältliche Softwarepaket `SINGULAR` auf Ihrem Computer:

`http://www.singular.uni-kl.de/`

Machen Sie sich nach der Installation ein wenig mit der Software vertraut, etwa indem Sie den Abschnitt 2.3 (Getting Started) des Online Manual durcharbeiten:

`http://www.singular.uni-kl.de/Manual/latest/sing_5.htm#SEC11`

Die darin enthaltene Mathematik müssen Sie nicht verstehen, und Sie müssen auch nichts abgeben.

Aufgabe 1

Sei k ein Körper, sei $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Zu $a \in k^n$ sei k_a die durch den Homomorphismus

$$A \to k, \quad f \mapsto f(a)$$

gegebene A-Algebra. Zeige: Für $a \neq b$ in k^n sind die A-Algebren k_a und k_b nicht isomorph.

Aufgabe 2

Ein integrer Ring A heißt *ganz abgeschlossen*, wenn der ganze Abschluß von A im Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(A)$ gleich A ist. Zeige, daß jeder faktorielle Ring ganz abgeschlossen ist.

Aufgabe 3

Sei A ein noetherscher Ring. Für jedes Ideal $I \subseteq A$ ist auch der Ring A/I noethersch. Für jede multiplikative Teilmenge $S \subseteq A$ ist auch der Ring A_S noethersch.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring, seien I, I_1, I_2 Ideale von A.

(a) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
(b) $\sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$.
(c) Gilt auch $\sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{I_1} \cdot \sqrt{I_2}$?
(d) Ist $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und J ein Ideal von B, so ist $\sqrt{\varphi^{-1}(J)} = \varphi^{-1}(\sqrt{J})$.
(e) $\mathrm{Nil}(A/I) = \sqrt{I}/I$.
(f) $\sqrt{IA_S} = \sqrt{I} \cdot A_S$ für jede multiplikative Teilmenge S von A.