Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
23. Juni 2015

Übungen zur Vorlesung
Darstellungstheorie und Invariantentheorie
(SS 2015)

Blatt 10

Besprechung: Donnerstag, 2. Juli 2015

Sei k ein Körper.

Aufgabe 37

Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ eine Untergruppe, betrachte die Unterhalbgruppe $S := L \cap \mathbb{Z}_+^n$ von L. Es gibt eine eindeutig bestimmte kleinste endliche Teilmenge S_0 von S derart, daß jedes Element von S Summe von endlich vielen Elementen aus S_0 ist. Man nennt S_0 die *Hilbertbasis* von S. (*Anleitung*: Benutze das Lemma von Dickson, siehe B5.)

Aufgabe 38

Sei S eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-graduierte k-Algebra, mit $S_0 = k$ und $S_d = \{0\}$ für $d < 0$.

(a) Sei A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul, sei $f\colon M \to M$ ein A-linearer Endomorphismus. Ist f surjektiv, so ist f auch injektiv.

(b) Sei M ein endlich erzeugter graduierter S-Modul, welcher frei als ungraduierter S-Modul ist. Dann hat M eine S-Basis aus homogenen Elementen, d.h. ist graduiert frei.

Anleitung: In (a) betrachte man die Folge $\ker(f^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, und in (b) benutze man (a).

Aufgabe 39

Sei A ein reduzierter noetherscher Ring. Dann ist $\mathrm{Ass}(A)$ genau die Menge der minimalen Primideale von A.

Aufgabe 40

Sei S eine graduierte k-Algebra, erzeugt von S_1 (mit $\dim(S_1) < \infty$), und sei M ein endlich erzeugter graduierter S-Modul. Dann gibt es ein Polynom $P(t, M) \in \mathbb{Q}[t]$ mit $P(m, M) = \dim(M_m)$ für alle $m \gg 0$, genannt das *Hilbertpolynom* von M. Zeige an einem Beispiel, daß kein solches Polynom $P(t, M)$ zu existieren braucht, wenn S nicht von S_1 erzeugt wird.