Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

**Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie**

**Blatt 11**

**Abgabe:** Dienstag, 27. Januar 2014, 10.00 Uhr

**Aufgabe 41**

Sei $A$ ein Ring und $S$ eine multiplikative Teilmenge von $A$. Für jeden $A$-Modul $M$ definiert man $M_S := \{\frac{x}{s} \colon x \in M,\, s \in S\}$, wobei nach Definition gilt

$$\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, t \in S \ \text{ mit } \ t(s'x - sx') = 0$$

($x,\, x' \in M,\ s,\, s' \in S$). Sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ $(*)$ eine Sequenz von $A$-Moduln. Für $x \in M$ sei $\operatorname{Ann}(x) = \{a \in A \colon ax = 0\}$ das Annullatorideal von $x$.

(a) $M_S$ ist mit den natürlichen Operationen ein $A_S$-Modul. Ist $(*)$ exakt, so ist auch die induzierte Sequenz $M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S$ von $A_S$-Moduln exakt.

(b) Für $x \in M$ gilt: $\frac{x}{1} = 0$ in $M_S \Leftrightarrow \operatorname{Ann}(x) \cap S \neq \varnothing$.

(c) Ist $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von $A$, so ist $M = 0$.

(d) Ist $M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}}$ exakt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von $A$, so ist $(*)$ exakt.

**Aufgabe 42**

Sei $k \subseteq E \subseteq F$ eine Kette von Körpererweiterungen, und sei $x \in F$ transzendent über $E$. Dann ist $[E : k] = [E(x) : k(x)]$.

*Hinweis:* Zum Beweis von $\le$ zeige man für $k$-linear unabhängige $a_1, \dots, a_r \in E$, daß $a_1, \dots, a_r$ auch über $k(x)$ linear unabhängig sind.

**Aufgabe 43**

Sei $k \subseteq K$ eine endlich erzeugte rein transzendente Körpererweiterung, und sei $a \in K$ algebraisch über $k$. Dann ist $a \in k$.

**Aufgabe 44**

Sei $k \subseteq K$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung.

(a) Sei $\widetilde{K} = \{a \in K \colon a \text{ ist algebraisch über } k\}$. Dann ist $\widetilde{K}$ ein Zwischenkörper von $K/k$, und $[\widetilde{K} : k] < \infty$.

(b) Jeder Zwischenkörper $k \subseteq F \subseteq K$ ist endlich erzeugt über $k$.

*Anleitung*: Wähle eine Transzendenzbasis von $K/k$ (a) bzw. von $F/k$ (b), betrachte den von ihr erzeugten Teilkörper und beachte Aufgabe 42.