Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 2

Abgabe: Dienstag, 4. November 2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 5

Sei A ein Ring. Ein *minimales Primideal* von A ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A derart, daß es kein echt in $\mathfrak{p}$ enthaltenes Primideal von A gibt.

(a) Jedes Primideal von A enthält ein minimales Primideal.
(b) Jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ von A besteht aus Nullteilern von A.
(c) Ist der Ring A reduziert, so ist die Menge der Nullteiler von A gleich der Vereinigung aller minimalen Primideale von A.

Hinweise: (a) Zornsches Lemma; (b) betrachte den lokalen Ring $A_{\mathfrak{p}}$ und sein Nilradikal.

Aufgabe 6

Sei k ein Körper mit algebraischem Abschluß $\overline{k}$.

(a) Für jeden Punkt $\xi \in \overline{k}^n$ ist
$$\mathfrak{m}_\xi \;:=\; \mathcal{I}_k(\{\xi\}) \;=\; \{f \in k[\mathtt{x}] \colon f(\xi) = 0\}$$
ein maximales Ideal von $k[\mathtt{x}] = k[x_1, \dots, x_n]$. Umgekehrt hat jedes maximale Ideal von $k[\mathtt{x}]$ die Form $\mathfrak{m}_\xi$ für ein $\xi \in \overline{k}^n$.
(b) Für jede endlich erzeugte k-Algebra A und jedes Ideal I von A ist $\sqrt{I}$ ein Durchschnitt von maximalen Idealen von A.

Aufgabe 7

Die Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ ist strikt feiner als die Produkttopologie. (Etwas schwieriger: Analoge Aussage für $\mathbb{A}^{m+n} = \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$ und beliebige m, $n \geq 1$.)

Aufgabe 8

Sei A ein Ring. Für Ideale I, J von A heißt
$$(I : J) \;:=\; \{a \in A \colon aJ \subseteq I\}$$
der *Idealquotient* I durch J. Zeige, daß $(I : J)$ ein Ideal von A ist, und zeige dann die folgenden Aussagen:

(a) Ist K ein weiteres Ideal von A, so gilt $((I : J) : K) = (I : JK)$.
(b) Ist I ein Ideal und $f \in A$, so ist $I \cap (f) = (I : f) \cdot (f)$.
(c) Für Ideale $I, I_1, \dots, I_r$ und $J, J_1, \dots, J_s$ von A ist
$$\Big(\bigcap_i I_i : J\Big) \;=\; \bigcap_i (I_i : J), \quad \Big(I : \sum_j J_j\Big) \;=\; \bigcap_j (I : J_j).$$