Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 3

Abgabe: Dienstag, 11. November 2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 9
Seien n, $d \geq 0$. Die Anzahl der Monome vom Grad d in $(x_0, \dots, x_n)$ ist $\binom{n+d}{n}$. Das ist auch die Anzahl der Monome vom Grad $\leq d$ in $(x_1, \dots, x_n)$.

Aufgabe 10
Sei $C = \{(t^3, t^4, t^5) \colon t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^3$. Verwende Koordinaten (x, y, z) in $\mathbb{A}^3$.

(a) Für $f = z^2 - x^2 y$ und $g = x^4 + y^3 - 2xyz$ ist $\mathcal{V}(f, g) = C$.

(b) Das Verschwindungsideal $\mathcal{I}_k(C)$ von C in $k[x, y, z]$ kann nicht von zwei Polynomen erzeugt werden.

Anleitung: Um "$\subseteq$" in (a) zu zeigen, schreibe man eine Nullstelle von f in der Form $(s^3, t^4, s^3 t^2)$ mit s, $t \in K$. Für (b) sei $\mathfrak{m} = \{p \in k[x, y, z] \colon f(0) = 0\}$ und $I := \mathcal{I}_k(C)$. Man zeige $I \subseteq \mathfrak{m}^2$ und zeige dann, daß der Unterraum $(I + \mathfrak{m}^3)/\mathfrak{m}^3$ von $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ mindestens Dimension 3 hat.

Aufgabe 11
Sei $C = \{(t, t^2, t^3) \colon t \in \mathbb{A}^1\} \subseteq \mathbb{A}^3$ die rationale Normalenkurve im $\mathbb{A}^3$, und sei $T \subseteq \mathbb{A}^3$ die Vereinigung aller Tangenten an C, also $T = \phi(\mathbb{A}^2)$ mit

$$\phi\colon\ \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^3, \quad \phi(s_1, s_2) \ = \ (s_1 + s_2,\ s_1^2 + 2s_1 s_2,\ s_1^3 + 3s_1^2 s_2).$$

Berechne mit `SINGULAR` die Gleichung der Fläche $\overline{T}$ im $\mathbb{A}^3$.

Aufgabe 12
Seien $f_1, \dots, f_r \in k(\mathtt{x}) = k(x_1, \dots, x_n)$ rationale Funktionen. Wir schreiben $f_i = g_i/h$ mit $g_1, \dots, g_r$, $h \in k[\mathtt{x}]$ und $h \neq 0$. Dann ist die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{A}^n \smallsetminus \mathcal{V}(h) \to \mathbb{A}^r, \quad \phi(\xi) \ := \ \big(f_1(\xi), \dots, f_r(\xi)\big)$$

wohldefiniert. Sei V der Abschluß von $\operatorname{im}(\phi)$ in der k-Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^r$. Zeige, daß $k[V]$ zum Teilring $k[f_1, \dots, f_r]$ von $k(\mathtt{x})$ k-isomorph ist, und folgere: V ist k-irreduzibel.