Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 4

Abgabe: Dienstag, 18. November 2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 13

Sei $I = (x^2 - y, x^3 - z) \subseteq k[x, y, z]$. Welche Gröbnerbasis von I gibt der Buchberger-Algorithmus bezüglich (a) *invlex*, (b) *lex*, (c) *grevlex*? Ist diese minimal? Welches ist jeweils die reduzierte Gröbnerbasis von I?

Aufgabe 14

Sei $I \subseteq k[x, y, z]$ das von

$$x^2 + y + z - 1, \quad x + y^2 + z - 1, \quad x + y + z^2 - 1$$

erzeugte Ideal. Zeige, daß die Nullstellenmenge $X := \mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^3$ endlich ist, und gib alle Punkte von X explizit an.

Aufgabe 15

(a) Sind I, J monomiale Ideale in $k[\mathtt{x}]$, so sind auch die Ideale $\sqrt{I}$, $I + J$, $I \cap J$, IJ und $(I : J)$ monomial.

(b) Sei I ein monomiales Ideal in $k[\mathtt{x}]$, erzeugt von $\mathtt{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathtt{x}^{\alpha_r}$, und sei $\mathtt{x}^\beta$ ein weiteres Monom. Dann ist

$$(I : \mathtt{x}^\beta) \;=\; \Big(\frac{\mathtt{x}^{\alpha_1}}{\mathrm{ggT}(\mathtt{x}^{\alpha_1}, \mathtt{x}^\beta)}, \dots, \frac{\mathtt{x}^{\alpha_r}}{\mathrm{ggT}(\mathtt{x}^{\alpha_r}, \mathtt{x}^\beta)}\Big).$$

Aufgabe 16

Sei $I \subseteq k[\mathtt{x}]$ ein Ideal, und seien $\preceq_1$, $\preceq_2$ zwei Monomordnungen mit $\mathrm{LI}_{\preceq_1}(I) \subseteq \mathrm{LI}_{\preceq_2}(I)$.

(a) Es gilt $\mathrm{LI}_{\preceq_1}(I) = \mathrm{LI}_{\preceq_2}(I)$.

(b) Bezüglich $\preceq_1$ und $\preceq_2$ hat I dieselbe reduzierte Gröbnerbasis G, und für jedes $g \in G$ ist $\mathrm{LM}_{\preceq_1}(g) = \mathrm{LM}_{\preceq_2}(g)$.