Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 5

Abgabe: Dienstag, 25. November 2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 17

Seien $f,\ f_1, \dots, f_r \in k[\mathtt{x}]$. Zeige:

$$f \in \sqrt{(f_1, \dots, f_r)} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \in (f_1, \dots, f_r, 1 - tf),$$

wobei das linke Ideal in $k[\mathtt{x}]$ und das rechte Ideal in $k[t, \mathtt{x}]$ gebildet wird.

Aufgabe 18

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{s\times n}(k)$, sei $r = \mathrm{rk}(A)$, und sei $f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \in k[x_1, \dots, x_n]$ $(i = 1, \dots, s)$. Sei $B = (b_{ij})$ die reduzierte Zeilenstufenform der Matrix A, und sei

$$g_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j \quad (i = 1, \dots, s).$$

Sei $\preceq$ eine Monomordnung mit $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$. Zeige: $\{g_1, \dots, g_r\}$ ist die reduzierte $\preceq$-Gröbnerbasis des Ideals $(f_1, \dots, f_s)$.

Aufgabe 19

Sei $I \subseteq k[\mathtt{x}]$ ein Ideal. In dieser Aufgabe wird gezeigt, daß die Menge $\mathcal{L} = \{\mathrm{LI}_\preceq(I)\colon$ $\preceq$ Monomordnung$\}$ aller Leitideale von I endlich ist.

(a) Sei dazu M ein monomiales Ideal, und sei $\mathcal{L}' := \{L \in \mathcal{L}\colon M \subseteq L\}$. Wir nehmen an $|\mathcal{L}'| = \infty$. Zeige unter dieser Annahme:
   (1) Es gibt ein $0 \neq f \in I$ derart, daß kein Monom von f in M liegt. (Benutze den Satz von Macaulay.)
   (2) Für f wie in (1) gibt es ein in f vorkommendes Monom m, so daß die Menge $\{L \in \mathcal{L}'\colon m \in L\}$ unendlich ist.

(b) Gib einen (indirekten) Beweis von $|\mathcal{L}| < \infty$. (*Hinweis*: Ersetze M in (a) nach Anwendung von (1) und (2) durch $M + (m)$, und iteriere.)

(c) Folgere: Zu jedem Ideal I gibt es eine endliche Teilmenge $G \subseteq I$ derart, daß G eine Gröbnerbasis von I bezüglich jeder Monomordnung ist. (Ein solches G heißt eine *universelle Gröbnerbasis* von I.)

Hinweis zu (c): Aufgabe 16.

Aufgabe 20

Die Kardioide ist die in Polarkoordinaten (r, θ) durch die Gleichung

$$r = 1 + \cos(\theta)$$

gegebene Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$. Bestimme das Verschwindungsideal von C in $\mathbb{R}[x, y]$.