Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 6

Abgabe: Dienstag, 2. Dezember 2014, 12.00 Uhr

In den Aufgaben 21-23 sei S ein G-graduierter Ring, wobei die abelsche Gruppe G eine Anordnung habe.

Aufgabe 21
Sei T eine multiplikative Teilmenge von S mit $0 \notin T$. Dann gibt es ein Ideal I von S, welches maximal ist bezüglich "I ist homogen und $I \cap T = \varnothing$". Jedes solche Ideal I ist ein Primideal.

Aufgabe 22
Sei I ein homogenes Ideal in S. Dann sind auch alle minimalen Primteiler von I homogen. (*Anleitung:* Für jedes Ideal J setze man $J^* := \bigoplus_{g \in G}(J \cap S_g)$ und zeige: Ist J ein Primideal, so auch J^*.)

Aufgabe 23
Sei I ein homogenes Ideal von S und T eine multiplikative Teilmenge von S aus homogenen Elementen. Dann besteht ein kanonischer Ringisomorphismus

$$(S/I)_{(\overline{T})} \;\cong\; S_{(T)}\big/I_{(T)}.$$

Hierbei sei $\overline{T} := \{t + I \colon t \in T\}$ und

$$I_{(T)} \;:=\; \Big\{\frac{f}{t} \colon f \in I \text{ homogen},\ t \in T,\ \deg(f) = \deg(t)\Big\}.$$

Aufgabe 24
Sei $k = \mathbb{R}$, sei $X = \mathcal{V}_+(x_0^2 + x_1^2 - x_0x_2) \subseteq \mathbb{P}^2$. Für $i = 0, 1, 2$ sei $L_i = V_+(x_i)$ und $U_i = \mathbb{P}^2 \setminus L_i$. Bestimme für $i = 0, 1, 2$ den Typ des affinen Kegelschnitts $U_i \cap X$ in $U_i \cong \mathbb{A}^2$. Mache eine schematische Skizze, die die relative Lage von X und den Geraden L_0, L_1, L_2 im $\mathbb{P}^2$ veranschaulicht.