Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 7

Abgabe: Dienstag, 9. Dezember 2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 25

Sei $\mathtt{x} = (x_1, \dots, x_n)$, sei I ein Ideal in $k[\mathtt{x}]$, und sei I^h seine Homogenisierung in $k[x_0, \mathtt{x}]$. Dann gilt $\sqrt{I^h} = (\sqrt{I})^h$.

Aufgabe 26

Begründe, daß die Abbildung f wohldefiniert ist, und bestimme Erzeuger für das homogene Verschwindungsideal $\mathcal{I}_+(\mathrm{im}(f))$ (z.B. mit `SINGULAR`):

(a) $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $f(x_0 : x_1) = (x_0^2 + x_1^2 : 2x_0x_1 : x_0^2 - x_1^2)$;
(b) $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$, $f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$.

Aufgabe 27

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $C = \{(t, t^2, \dots, t^n)\colon t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^n$, sei $\overline{C}$ der projektive Abschluß von C in $\mathbb{P}^n$. (Wir verwenden Koordinaten $(x_0 : \cdots : x_n)$ auf $\mathbb{P}^n$ und identifizieren $\mathbb{A}^n$ mit $D_+(x_0) \subseteq \mathbb{P}^n$.)

(a) C ist eine irreduzible und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^n$.
(b) Bestimme die Varietät C_∞ der unendlich fernen Punkte von C.
(c) $\overline{C}$ ist die projektive Nullstellenmenge des homogenen Ideals, das von allen 2×2-Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

($\overline{C}$ heißt *rationale Normalenkurve* vom Grad n.)

Aufgabe 28

Benutze `SINGULAR`, um zu zeigen: Die Menge der singulären Formen vom Grad 3 in $\mathtt{x} = (x_0, x_1, x_2)$ bildet eine Hyperfläche im $\mathbb{P}^9$ aller Formen vom Grad 3. Was ist der Grad dieser Hyperfläche? Wieviele Terme hat ihre Gleichung? Wie lautet der `SINGULAR`-Code?