Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 8

Abgabe: Dienstag, 16. Dezember 2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 29

Sei $C \subseteq \mathbb{P}^n$ die rationale Normalenkurve vom Grad n (siehe Aufgabe 27). Je $n+1$ verschiedene Punkte von C sind projektiv unabhängig, d.h. spannen den $\mathbb{P}^n$ auf.

Aufgabe 30

Sei X eine irreduzible quasiprojektive k-Varietät. Dann ist der Ring $\mathcal{O}(X)$ nullteilerfrei. Für jede nichtleere offene Teilmenge U von X ist die Restriktionsabbildung $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(U)$ injektiv.

Aufgabe 31

Sei $n \geq 2$. Betrachte die offene Untervarietät $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus \{(0, \dots, 0)\}$ von $\mathbb{A}^n$ und zeige, daß die Restriktionsabbildung

$$k[x_1, \dots, x_n] = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(U)$$

ein Isomorphismus ist. Folgere daraus, daß die Varietät U nicht affin ist.

Aufgabe 32

Sei $\mathtt{x} = (x_0, x_1)$.

(a) Seien r, $s \geq 1$, und seien $f = \sum_{i=0}^r a_i x_0^i x_1^{r-i}$, $g = \sum_{j=0}^s b_j x_0^j x_1^{s-j}$ (mit a_i, $b_j \in k$) zwei binäre Formen mit $\deg(f) = r$ und $\deg(g) = s$. Die *Resultante* $\operatorname{res}(f, g)$ von f und g ist definiert als die $(r+s) \times (r+s)$-Determinante

$$\operatorname{res}(f,g) \;=\; \det \begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & & \\ \vdots & a_1 & \ddots & & \vdots & b_1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & a_1 & b_s & \vdots & & \ddots & b_0 \\ a_r & \vdots & & \vdots & & b_s & & & b_1 \\ & a_r & & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_r & & & & & b_s \end{pmatrix}.$$

(Die Matrix hat s Spalten a und r Spalten b.) Man zeige: $\operatorname{res}(f, g) = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $\xi \in \mathbb{P}^1(K)$ mit $f(\xi) = g(\xi) = 0$.

(b) Sei $\mathtt{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, seien f, $g \in k[\mathtt{x}, \mathtt{y}]$ homogen bezüglich $\mathtt{x}$, und sei

$$X \ := \ \{(\xi, \eta) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n \colon f(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) = 0\}.$$

Sei $\pi \colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ die durch $\pi(\xi, \eta) = \eta$ definierte Projektion, und sei $R(\mathtt{y}) := \operatorname{res}(f(\mathtt{x}, \mathtt{y}), g(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$ die Resultante bezüglich $\mathtt{x}$ (ein Polynom in $k[\mathtt{y}]$). Zeige

$$\pi(X) \ = \ \{\eta \in \mathbb{A}^n \colon R(\eta) = 0\}.$$

Anleitung zu (a): Betrachte die lineare Abbildung

$$k[\mathtt{x}]_{s-1} \oplus k[\mathtt{x}]_{r-1} \ \to \ k[\mathtt{x}]_{r+s-1}, \quad (p, q) \mapsto pf + qg,$$

wobei $k[\mathtt{x}]_d$ den Raum aller Formen vom Grad d in $k[\mathtt{x}]$ bezeichnet, und wähle geeignete Basen für die Vektorräume.