Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Wenzel
WS 2014/15

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 8. Januar 2014, 10.00 Uhr

Aufgabe 33
Die projektive k-Varietät $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, definiert über die Segre-Einbettung wie in der Vorlesung, hat die folgenden Eigenschaften:

(a) Die Projektionen pr_1, pr_2 auf die beiden Faktoren sind Morphismen von k-Varietäten.
(b) Sind $f\colon X \to \mathbb{P}^m$ und $g\colon X \to \mathbb{P}^n$ Morphismen von k-Varietäten, so gibt es genau einen Morphismus $h\colon X \to \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ der k-Varietäten mit $f = \mathrm{pr}_1 \circ h$ und $g = \mathrm{pr}_2 \circ h$.

Aufgabe 34
Zeige, daß die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ genau die Nullstellenmengen von Systemen aus bihomogenen Polynomen in $k[\mathtt{x}, \mathtt{y}]$ sind. Hier ist $\mathtt{x} = (x_0, \ldots, x_m)$, $\mathtt{y} = (y_0, \ldots, y_n)$, und $f(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ heißt bihomogen vom Bigrad (d, e), wenn in f nur Monome $\mathtt{x}^\alpha \mathtt{y}^\beta$ mit $|\alpha| = d$ und $|\beta| = e$ vorkommen.

Aufgabe 35
Seien drei paarweise disjunkte Geraden L_1, L_2, L_3 im $\mathbb{P}^3$ gegeben. Beweise: Die Vereinigung aller Geraden im $\mathbb{P}^3$, welche alle drei Geraden schneiden, ist projektiv äquivalent zur Segrevarietät $S_{1,1}$.

Anleitung: Zeige zunächst, daß man lineare Koordinaten auf $\mathbb{P}^3$ derart finden kann, daß $L_1 = \mathcal{V}_+(x_0, x_1)$, $L_2 = \mathcal{V}_+(x_2, x_3)$ und $L_3 = \mathcal{V}_+(x_0 - x_2, x_1 - x_3)$ ist.

Aufgabe 36
Sei $\sigma\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ die Segre-Einbettung. Für jeden Punkt $p = (a : b) \in \mathbb{P}^1$ sind $G_p := \sigma(p \times \mathbb{P}^1)$ und $H_p := \sigma(\mathbb{P}^1 \times p)$ Geraden im $\mathbb{P}^3$. Stelle die Gleichungen dieser Geraden auf.