Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
22. Oktober 2015

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 29. Oktober 2015 um 10.00 Uhr

Aufgabe 1
Eine total geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt *Dedekind-vollständig*, falls für je zwei nichtleere Teilmengen I und J von M mit $I \leq J$ gilt: Es gibt ein $x \in M$ mit $I \leq x \leq J$. Man zeige: M ist genau dann Dedekind-vollständig, wenn M keinen freien Dedekindschnitt besitzt.

Aufgabe 2
Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper, welcher Dedekind-vollständig ist. Dann ist $K = \mathbb{R}$.

Aufgabe 3
Sei (K, P) ein angeordneter Körper, sei x eine Variable, und sei $Q \subseteq K(x)$ die Menge aller Brüche $\frac{f}{g}$ von Polynomen mit $g \neq 0$, für die entweder $f = 0$ ist oder die Leitkoeffizienten von f und g bezüglich P dasselbe Vorzeichen haben.

(a) Q ist eine Anordnung von $K(x)$, welche P fortsetzt.
(b) Für alle $a \in K$ gilt $x \geq_Q a$. Insbesondere ist $(K(x), Q)$ nicht archimedisch.

Aufgabe 4
Der rationale Funktionenkörper $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ in n Variablen über $\mathbb{Q}$ hat sowohl archimedische wie nichtarchimedische Anordnungen.