Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
7. Januar 2016

**Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)**

**Blatt 10**

**Abgabe:** Donnerstag, 14. Januar 2016 um 11.45 Uhr

Sei $R$ stets ein reell abgeschlossener Körper.

**Aufgabe 37**
Seien $N$, $N' \subseteq M \subseteq R^n$ semialgebraische Mengen.

(a) Genau dann ist $N$ dicht in $M$, wenn die Menge
$$(\widetilde{M})_{\min} := \{\alpha \in \widetilde{M}\colon \text{ aus } \beta \in \widetilde{M} \text{ und } \beta \rightsquigarrow \alpha \text{ folgt } \beta = \alpha\}$$
in $\widetilde{N}$ enthalten ist.

(b) Sind $N$ und $N'$ dicht in $M$, so ist auch $N \cap N'$ dicht in $M$.

**Aufgabe 38**
Sei $M$ eine semialgebraische Teilmenge von $R^{n+1} = R^n \times R$, und sei
$$\pi\colon R^{n+1} \to R^n, \quad \pi(x,t) := x \quad (x \in R^n,\ t \in R)$$
die Projektion. Zeige: Es gibt eine definierbare Abbildung $s\colon \pi(M) \to R$ mit $\big(x, s(x)\big) \in M$ für alle $x \in \pi(M)$.

**Aufgabe 39**
Sei $X$ eine nichtleere Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X) = 2^X$ heißt ein *Filter* auf $X$, wenn $X \in \mathcal{F}$ und $\varnothing \notin \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ stabil unter endlichen Durchschnitten ist, und wenn aus $B \subseteq A \subseteq X$ und $B \in \mathcal{F}$ stets $A \in \mathcal{F}$ folgt. Gilt zudem für jede Teilmenge $A$ von $X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$, so heißt $\mathcal{F}$ ein *Ultrafilter*.

(a) Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{F}_x := \{A \subseteq X\colon x \in A\}$ ein Ultrafilter auf $X$. Solche Ultrafilter heißen *prinzipal*.

(b) Ist $|X| = \infty$, so ist $\mathcal{F} := \{A \subseteq X\colon |X \setminus A| < \infty\}$ ein Filter auf $X$. Dieser ist in keinem prinzipalen Ultrafilter, aber in jedem nicht-prinzipalen Ultrafilter enthalten.

(c) Zeige mit Hilfe des Zornschen Lemmas: Jeder Filter auf $X$ ist in einem Ultrafilter enthalten.

**Aufgabe 40**
Sei $I$ eine unendliche Menge und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $I$. Für jedes $i \in I$ sei $K_i$ ein Körper. Sei $\prod_{i\in I} K_i$ das direkte Produkt der $K_i$. Für $a = (a_i)_{i\in I} \in \prod_i K_i$ sei $Z(a) = \{i \in I\colon a_i = 0\}$. Sei schließlich
$$J_{\mathcal{F}} := \Big\{a \in \prod_{i\in I} K_i\colon Z(a) \in \mathcal{F}\Big\}.$$

(a) $J_{\mathcal{F}}$ ist ein maximales Ideal des Rings $\prod_I K_i$. Der Restklassenkörper
$$K_{\mathcal{F}} := \Bigl(\prod_{i\in I} K_i\Bigr)\Big/ J_{\mathcal{F}}$$
heißt ein *Ultraprodukt* der Körper $K_i$ $(i \in I)$.

(b) Ist jeder der Körper $K_i$ reell abgeschlossen, so ist auch $K_{\mathcal{F}}$ reell abgeschlossen.

(c) Jetzt sei $K_i = R$ reell abgeschlossen für alle $i \in I$, sei $R^* = R^I/\mathcal{F}$. Sei $\phi(x_1, \dots, x_n)$ eine $R$-Formel, sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in (R^*)^n$, wobei $\xi_\nu$ die Restklasse des $I$-Tupels $(\xi_\nu^i)_{i\in I}$ ist $(\nu = 1, \dots, n)$. Genau dann gilt $R^* \models \phi(\xi)$, wenn die Menge $\{i \in I \colon R \models \phi(\xi_1^i, \dots, \xi_n^i)\}$ in $\mathcal{F}$ liegt.