Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
14. Januar 2016

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 21. Januar 2016 um 11.45 Uhr

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 41
Sei $S^n = \{\xi \in R^{n+1} \colon |\xi| = 1\}$ die n-dimensionale Sphäre und $\infty = (1, 0, \dots, 0)$ ihr Nordpol.

(a) Die stereographische Projektion $p \colon S^n \setminus \{\infty\} \to R^n$ ist ein semialgebraischer Homöomorphismus.
(b) Eine Teilmenge $M \subseteq R^n$ ist genau dann unbeschränkt, wenn ∞ im Abschluß von $p^{-1}(M)$ liegt.

Aufgabe 42
Sei M eine semialgebraische Menge. Genau dann ist M semialgebraisch zusammenhängend, wenn $\widetilde{M}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 43
Sei $f \colon M \to N$ eine surjektive semialgebraische Abbildung zwischen semialgebraischen Mengen. Sei N s.a. zusammenhängend, und sei $f^{-1}(y)$ s.a. zusammenhängend für jedes $y \in N$.

(a) Bildet f offene semialgebraische Teilmengen von M auf offene Teilmengen von N ab, so ist M semialgebraisch zusammenhängend. Ebenso, wenn man "offen" durch "abgeschlossen" ersetzt.
(b) Zeige an einem Beispiel, daß (a) ohne weitere Voraussetzung an f im allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 44
Sei M eine semialgebraische Menge

(a) Ist $\alpha \in \widetilde{M}_{\min}$ und $N \subseteq M$ eine semialgebraische Teilmenge mit $\alpha \in \widetilde{N}$, so gibt es eine in M offene semialgebraische Teilmenge U von N mit $\alpha \in \widetilde{U}$.
(b) Seien $M_1, \dots, M_r \subseteq M$ semialgebraische Teilmengen. Ist $M_1 \cup \dots \cup M_r$ dicht in M, so ist auch $\mathrm{int}(M_1) \cup \dots \cup \mathrm{int}(M_r)$ dicht in M. (Hier bezeichnet $\mathrm{int}(M_i)$ das relative Innere von M_i in M.)
(c) Ist $f \colon M \to R^m$ eine definierbare Abbildung, so gibt es eine in M offene und dichte semialgebraische Menge $M' \subseteq M$, so daß $f|_{M'}$ stetig ist.