Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
21. Januar 2016

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 12

Abgabe: Donnerstag, 28. Januar 2016 um 11.45 Uhr

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 45
Der projektive Raum $\mathbb{P}^n(R)$ ist semialgebraisch kompakt.

Aufgabe 46
Sei M eine abgeschlossene und beschränkte semialgebraische Teilmenge von R^n, und sei $f\colon M \to M$ eine definierbare Abbildung mit $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle x, $y \in M$ mit $x \neq y$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Aufgabe 47
Eine semialgebraische Teilmenge $M \subseteq R^n$ ist genau dann abgeschlossen und beschränkt, wenn für jeden abgeschlossenen Punkt α von $\widetilde{M}$ gilt: Die Erweiterung $R \subseteq R(\alpha)$ reell abgeschlossener Körper ist archimedisch. Für $R = \mathbb{R}$ ist auch äquivalent: $(\widetilde{M})^{\max} = M$. (*Hinweis*: Benutze Satz II.5.15 der Vorlesung.)

Aufgabe 48
Seien $N \subseteq M$ semialgebraische Mengen. Ist N dicht in M und $M \neq \varnothing$, so ist $\dim(M \smallsetminus N) < \dim(M)$. (*Hinweis:* Argumentiere mit dem reellen Spektrum.)