Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
29. Oktober 2015

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 5. November 2015 um 11.45 Uhr

Aufgabe 5
Sei (K, P) ein angeordneter Körper. Sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}_P$ die Topologie auf K, welche alle offenen Intervalle $]a, b[_P$ $(a,\ b \in K)$ als Basis offener Mengen hat. Zeige, daß $(K, \mathcal{T})$ ein topologischer Körper ist, d.h. daß Addition und Multiplikation (als Abbildungen $K \times K \to K$) und Inversion (als Abbildung $K^* \to K^*$) stetig sind.

Aufgabe 6
Sei (K, P) ein angeordneter Körper, und sei $\mathcal{T}_P$ seine Ordnungstopologie (Aufgabe 5). Ist $K \neq \mathbb{R}$, so ist der topologische Raum $(K, \mathcal{T}_P)$ total unzusammenhängend. (*Hinweis:* Beachte Aufgaben 1 und 2.)

Aufgabe 7
Sei $P = \{f \in \mathbb{R}(x, y) \colon \exists\, \epsilon > 0 \text{ mit } f(t, e^t) \geq 0 \text{ für } 0 < t < \epsilon\}$. Zeige, daß P ein Positivkegel im Körper $\mathbb{R}(x, y)$ ist.

Aufgabe 8
Sei K ein Körper. Eine *formale Laurentreihe* über K (in der Unbestimmten x) ist eine formale unendliche Reihe

$$f \ = \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$$

mit Koeffizienten $a_n \in K$ derart, daß es ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ mit $a_n = 0$ für alle $n < n_0$ gibt. Für solches f sei $v(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} \colon a_n \neq 0\}$ falls $f \neq 0$, sowie $v(0) = \infty$. Sei $K(\!(x)\!)$ die Menge aller formalen Laurentreihen und $K[\![x]\!] = \{f \in K(\!(x)\!) \colon v(f) \geq 0\}$ die Menge der formalen Potenzreihen. Für $f = \sum_n a_n x^n$, $g = \sum_n b_n x^n \in K(\!(x)\!)$ sei

$$f + g \ := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n + b_n) x^n, \quad fg \ := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m} \Big) x^n.$$

(a) $K(\!(x)\!)$ ist ein Körper.
(b) v ist eine diskrete Bewertung von $K(\!(x)\!)$ mit Bewertungsring $K[\![x]\!]$.
(c) Sei P eine Anordnung von K. Dann werden durch

$$\operatorname{sign}_{P_+}(f) \ := \ \operatorname{sign}_P(a_{v(f)}),$$
$$\operatorname{sign}_{P_-}(f) \ := \ (-1)^{v(f)} \operatorname{sign}_P(a_{v(f)})$$

$(0 \neq f \in K(\!(x)\!))$ zwei Anordnungen $P_\pm$ von $K(\!(x)\!)$ definiert, welche P fortsetzen.

Hinweis zu (a): Zeige zunächst, daß $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind und $K(\!(x)\!)$ ein Ring ist. Benutze dann die geometrische Reihe, um für $f = 1 + g$ mit $v(g) \geq 1$ zu zeigen $f^{-1} \in K(\!(x)\!)$.