Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
5. November 2015

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 12. November 2015 um 11.45 Uhr

Aufgabe 9

Sei $(K, P) \subseteq (L, Q)$ eine endliche Erweiterung angeordneter Körper (d.h. es gelte $Q \cap K = P$).

(a) Die Erweiterung ist archimedisch, d.h. für alle $b \in L$ existiert ein $a \in K$ mit $b \leq_Q a$.

(b) Im allgemeinen ist K nicht dicht in L bezüglich der Ordnungstopologie von Q. Zeige dies am Beispiel $L = \mathbb{R}(t)$ und $K = \mathbb{R}(t^2)$ mit $0 <_Q nt <_Q 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis zu (b): Es gibt kein $f \in K$ mit $t < f < 2t$.

Aufgabe 10

Sei K ein Körper, sei $K[\![\mathtt{x}]\!]$ der Potenzreihenring über K und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal, sowie $K(\!(\mathtt{x})\!) = \text{Quot } K[\![\mathtt{x}]\!]$.

(a) Zu jedem $f \in \mathfrak{m}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$ in K existiert ein $g \in \mathfrak{m}$ mit $(1 + g)^n = 1 + f$. (*Hinweis:* Binomische Reihe.)

(b) Ist $\text{char}(K) \neq 2$, so hat jedes $f \in K(\!(\mathtt{x})\!)^*$ eine eindeutige Darstellung $f = a \cdot \mathtt{x}^n \cdot (1 + g)^2$ mit $a \in K^*$, $n \in \mathbb{Z}$ und $g \in \mathfrak{m}$.

(c) Jede Anordnung P von K hat genau zwei Fortsetzungen zu einer Anordnung Q von $K(\!(\mathtt{x})\!)$.

Aufgabe 11

Sei R ein reell abgeschlossener Körper, sei $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ ein normiertes Polynom in $R[t]$, dessen Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alle reell sind. Dann gilt:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^i a_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 12

Sei K ein Körper und $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n \in K[t]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln von f in $\overline{K}$, und sei $w_k = w_k(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k$ die k-te Newtonsche Summe ($k \geq 0$).

(a) Zeige die *Newtonsche Identität*

$$w_k + w_{k-1}\, a_1 + w_{k-2}\, a_2 + \cdots + w_1\, a_{k-1} + k\, a_k \;=\; 0$$

für alle $k \geq 0$. (Hierbei wird $a_k := 0$ für $k > n$ gesetzt.)

(b) Die $w_k(f)$ sind die Taylorkoeffizienten der Entwicklung von $\frac{f'}{f}$ um ∞, d.h. es gilt

$$\frac{f'}{f} \;=\; \frac{w_0}{t} + \frac{w_1}{t^2} + \frac{w_2}{t^3} + \cdots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{t^{k+1}}.$$