Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
12. November 2015

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 19. November 2015 um 11.45 Uhr

Sei jeweils R ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 13
Betrachte das Polynom

$$f \;=\; x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

in $\mathbb{R}[x,y]$.

(a) $f(a,b) \geq 0$ für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
(b) f ist nicht Summe von Quadraten in $\mathbb{R}[x,y]$.

Hinweise: Für (a) wende die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auf drei geeignete Zahlen an. In (b) mache einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten und führe ihn zu einem Widerspruch. Beachte $f(x,0) = f(0,y) = 1$.

Aufgabe 14
Finde eine Darstellung des Motzkin-Polynoms (Aufgabe 13) als Summe von Quadraten rationaler Funktionen in $\mathbb{R}(x,y)$. (*Hinweis:* Erweitere mit $1+x^2$.)

Aufgabe 15
Sei $\xi = (U,O)$ ein Dedekindschnitt von R. Wir setzen

$$P_\xi \;:=\; \Big\{ f \in R(t)\colon \exists\, a \in U \cup \{-\infty\}\ \exists\, b \in O \cup \{\infty\}\ \forall\, x \in \,]a,b[\ \ f(x) \geq 0 \Big\}.$$

(Hierbei bedeutet $f(x) \geq 0$ insbesondere, daß f in x keinen Pol hat.)

(a) P_ξ ist eine Anordnung von $R(t)$.
(b) Jede Anordnung von $R(t)$ ist von der Form P_ξ für genau einen Dedekindschnitt ξ von R.
(c) Genau dann ist die Erweiterung $(R, R_+) \subseteq \big(R(t), P_\xi\big)$ archimedisch (siehe Aufgabe 9(a)), wenn der Dedekindschnitt ξ frei ist.

Aufgabe 16
Sei $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine R-Formel, und sei $M = S_R(\varphi)$ die Erfüllungsmenge von φ in R^n. Gib eine explizite Formel an, deren Erfüllungsmenge der Abschluß $\overline{M}$ (bzw. das Innere $\mathrm{int}(M)$, bzw. der Rand ∂M, bzw. die konvexe Hülle $\mathrm{conv}(M)$) von M ist.