Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
19. November 2015

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 26. November 2015 um 11.45 Uhr

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 17
Sei $f\colon R^n \to R^m$ die Abbildung $\xi \mapsto (f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))$ mit Polynomen $f_1, \dots, f_m \in R[x_1, \dots, x_n]$. Zeige, daß für jede abgeschlossene beschränkte semialgebraische Menge $M \subseteq R^n$ die Bildmenge $f(M)$ abgeschlossen und beschränkt in R^m ist.

Aufgabe 18
Sei $K = R(x, y)$ der rationale Funktionenkörper in zwei Variablen. Gib eine Anordnung P von K explizit an, welche

$$\mathrm{sign}_P(f) \;=\; \mathrm{sign} f(0,0)$$

für alle $f \in R[x, y]$ mit $f(0,0) \neq 0$ erfüllt.

Aufgabe 19
Sei k ein Körper, welcher nicht algebraisch abgeschlossen ist. Dann gibt es für jedes $n \geq 1$ ein nichtkonstantes homogenes Polynom $f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit $f_n(a) \neq 0$ für alle $0 \neq a \in k^n$. (*Hinweis*: Induktion nach n.)

Aufgabe 20
Sei $K = \mathbb{R}(t)$, versehen mit der Anordnung $\leq$ mit $0 < nt < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sei R der reelle Abschluß von $(K, \leq)$. Zeige für das Polynom $f = x^4 - 4tx^2 + 3t^2 \in K[x]$:

(a) $f(a) \geq 0$ für alle $a \in K$;
(b) es gibt $b \in R$ mit $f(b) < 0$.