Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
26. November 2015

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 3. Dezember 2015 um 11.45 Uhr

Aufgabe 21

Sei A ein Ring.

(a) Sei $P \subseteq A$ eine Teilmenge mit $P + P \subseteq P$, $PP \subseteq P$ und $P \cup (-P) = A$. Genau dann ist P ein Positivkegel von A, wenn $-1 \notin P$ ist und für alle a, $b \in A$ gilt:

$$a \notin P \ \wedge \ b \notin P \ \Rightarrow \ -ab \notin P.$$

(b) Zeige Satz 1.3: Die Abbildung

$$\alpha \ = \ (\mathfrak{p}, T) \ \mapsto \ P_\alpha \ := \ \rho_{\mathfrak{p}}^{-1}(T)$$

ist eine Bijektion von $\mathrm{Sper}(A)$ auf die Menge aller Positivkegel von A.

Aufgabe 22

Sei A ein Ring, sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und $I \subseteq A$ ein Ideal.

(a) Der kanonische Homomorphismus $\varphi\colon A \to A_S$ induziert einen Homöomorphismus φ^* von $\mathrm{Sper}(A_S)$ auf den Teilraum $\{\alpha\colon S \cap \mathrm{supp}(\alpha) = \varnothing\}$ von $\mathrm{Sper}(A)$.

(b) Der kanonische Homomorphismus $\pi\colon A \to A/I$ induziert einen Homöomorphismus π^* von $\mathrm{Sper}(A/I)$ auf den Teilraum $\{\alpha\colon I \subseteq \mathrm{supp}(\alpha)\}$ von $\mathrm{Sper}(A)$.

Aufgabe 23

Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $R[x]$ der Polynomring in einer Variable. Bestimme die Elemente von $\mathrm{Sper}\, R[x]$ und sämtliche Spezialisierungen zwischen ihnen. Welches sind die abgeschlossenen Punkte von $\mathrm{Sper}\, R[x]$? (*Hinweis*: Beachte Aufgabe 15.)

Aufgabe 24

Sei R ein reell abgeschlossener Körper, sei $\Sigma := \Sigma R[x]^2$. Welche der folgenden Mengen $M \subseteq R[x]$ sind Präordnungen in $R[x]$?

(a) $M \ = \ \Sigma + \Sigma x$;

(b) $M \ = \ \Sigma + \Sigma x + \Sigma(1 - x)$;

(c) $M \ = \ \Sigma + \Sigma(x + 1) + \Sigma(x^2 - x)$.