Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
3. Dezember 2015

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 10. Dezember 2015 um 11.45 Uhr

Aufgabe 25
Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, und sei P ein Positivkegel von A. Genau dann gibt es einen Positivkegel Q von B mit $\varphi^{-1}(Q) = P$, wenn für alle $r \in \mathbb{N}$, alle $a, a_1, \dots, a_r \in P$ mit $a \notin -P$ und alle $b_1, \dots, b_r \in B$ gilt:

$$\varphi(a) + \sum_{i=1}^{r} \varphi(a_i) b_i^2 \neq 0$$

in B. (*Hinweis*: Allgemeiner reeller Stellensatz.)

Aufgabe 26
Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $\xi \in R^n$. Dann gibt es in $\operatorname{Sper} R[x_1, \dots, x_n]$ eine Spezialisierungskette $\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \alpha_n$ der Länge n (mit $\alpha_{i-1} \neq \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$), die in $\alpha_n = \xi$ endet.

Aufgabe 27
Sei A ein noetherscher Ring, sei $\varphi\colon A \to B$ eine endlich erzeugte A-Algebra. Für jede konstruierbare Teilmenge Y von $\operatorname{Sper}(B)$ ist die Menge $\varphi^*(Y)$ konstruierbar in $\operatorname{Sper}(A)$.

Aufgabe 28
Sei A ein Ring, sei X eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Sper}(A)$, und sei

$$\operatorname{Gen}(X) := \left\{\beta \in \operatorname{Sper}(A)\colon X \cap \overline{\{\beta\}} \neq \varnothing\right\}$$

die Menge aller Generalisierungen von Elementen aus X.

(a) Jede Umgebung von X in $\operatorname{Sper}(A)$ enthält eine konstruierbare solche Umgebung.
(b) Die Menge $\operatorname{Gen}(X)$ ist prokonstruierbar in $\operatorname{Sper}(A)$.
(c) Ist K eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Sper}(A)$ mit $\operatorname{Gen}(X) \subseteq K$, so enthält K eine Umgebung von X in $\operatorname{Sper}(A)$.