Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Hanselka
17. Dezember 2015

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie I (WS 2015/16)

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 7. Januar 2016 um 11.45 Uhr

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 33

Sei V eine affine R-Varietät und M eine semialgebraische Teilmenge von $V(R)$. Genau dann ist M Zariski-dicht in V, wenn jedes minimale Primideal von $R[V]$ Träger eines Punktes in $\widetilde{M}$ ist.

Aufgabe 34

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $M \subseteq R^n$ eine nichtleere semialgebraische Menge. Für alle $x \in R^n$ existiert

$$d_M(x) \;:=\; \operatorname{dist}(x, M) \;:=\; \inf\{|y-x| \colon y \in M\}$$

in R. Die Abbildung $d_M \colon R^n \to R$ ist eine (stetige) semialgebraische Funktion, und $d_M^{-1}(0) = \overline{M}$.

(b) Die semialgebraischen Mengen

$$R^n, \quad]0,\infty[^n, \quad]0,1[^n \quad \text{und} \quad B_n := \{x \in R^n \colon |x| < 1\}$$

sind alle zueinander semialgebraisch homöomorph.

Aufgabe 35

Sei R ein reell abgeschlossener Körper, sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von semialgebraischen Teilmengen von R^n. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j\in J} M_j = \varnothing$;

(ii) für jeden reell abgeschlossenen Oberkörper S von R ist $\bigcap_{i\in I} (M_i)_S = \varnothing$;

(iii) $\bigcap_{i\in I} \widetilde{M}_i = \varnothing$.

Dabei bezeichnet $(M_i)_S$ in (ii) die Grundkörpererweiterung der Menge M_i von R nach S.

b.w.

Aufgabe 36

Seien nichtnegative ganze Zahlen n, r, d fixiert. Man zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $N = N(n, r, d)$ derart, daß für jeden reell abgeschlossenen Körper R und beliebige Polynome $f_1, \dots, f_r \in R[x_1, \dots, x_n]$ mit $\deg(f_i) \leq d$ $(i = 1, \dots, r)$ gilt:

> *Ist* $\{\xi \in R^n \colon f_1(\xi) \geq 0, \dots, f_r(\xi) \geq 0\} = \varnothing$, *so gibt es Quadratsummen* s_e *in* $R[x_1, \dots, x_n]$ $(e \in \{0,1\}^r)$ *mit*
>
> $$-1 = \sum_{e \in \{0,1\}^r} s_e \cdot f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r} \tag{$*$}$$
>
> *und mit* $\deg(s_e) \leq N$ *für jeden Multiindex* e.

Anleitung: Für $N \geq 1$ betrachte man die Menge X_N aller Tupel $(f_1, \dots, f_r)$ mit $\deg(f_i) \leq d$, für die eine Identität $(*)$ mit $\deg(s_e) \leq N$ für alle e existiert. Man zeige, daß die Mengen X_N und $\bigcup_{N \geq 1} X_N$ semialgebraisch sind (in einem geeigneten endlich-dimensionalen R-Vektorraum), und verwende dann Aufgabe 35. Für den Beweis, daß X_N semialgebraisch ist, verwende man folgende Tatsache (die wir später beweisen): Zu n, $k \in \mathbb{N}$ gibt es $p \in \mathbb{N}$ derart, daß für jeden reell abgeschlossenen Körper R und jede Quadratsumme $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ mit $\deg(f) \leq k$ gilt: f ist eine Summe von p Quadraten in $R[x_1, \dots, x_n]$.

Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!