Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
20. Januar 2017

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 10

Abgabe: Freitag, 27. Januar 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 37

Bestimme die Dimension der Lösungsmenge von

$$\begin{array}{ccccccccc}
tx_1 & + & (t+1)x_2 & & & & & = & u_1 \\
 & & tx_2 & + & (t-1)x_3 & & & = & u_2 \\
 & & (t-1)x_2 & + & tx_3 & & & = & u_3 \\
x_1 & & & + & (t+1)x_3 & + & tx_4 & = & u_4
\end{array}$$

als affiner Unterraum von $\mathbb{R}^4$, in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 38

Jede gerade Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt von 3-Zykeln. (*Hinweis:* Beweise die Behauptung zunächst im Fall, wo σ ein Produkt von zwei Transpositionen ist.)

Aufgabe 39

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$.

(a) Sei $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ die durch $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ $(1 \le i, j \le n)$ definierte Matrix. Zeige $\det(B) = \det(A)$.

(b) Sei $a_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i + j > n + 1$. Dann ist

$$\det(A) \;=\; (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}.$$

Aufgabe 40

Sei $M \in \mathrm{M}_{m+n}(K)$ geschrieben als Blockmatrix

$$M \;=\; \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathrm{M}_m(K)$, $B, C^t \in \mathrm{M}_{m \times n}(K)$ und $D \in \mathrm{M}_n(K)$, und sei dabei A invertierbar.

(a) $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$.

(b) Ist $m = n$ und $AB = BA$, so ist $\det(M) = \det(DA - CB)$.

Hinweis zu (a): Multipliziere M mit einer geeigneten Blockmatrix.

Aufgabe I

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Seien $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$ mit $u \neq v$, und sei

$$L \;=\; \{(1-t)u + tv \colon t \in K\},$$

die affine Gerade durch u und v.

(a) Für $n = 2$ ist L die Menge aller $x = (x_1, x_2) \in K^2$ mit

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & u_2 & v_2 \end{pmatrix} \;=\; 0.$$

(b) Finde eine Verallgemeinerung von (a) für $n > 2$.