Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
27. Januar 2017

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 11

Abgabe: Freitag, 3. Februar 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 41

Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $a_i, b_i \in K$ für $i = 1, \dots, n$, und seien dabei $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschieden. Beweise: Es gibt genau ein Polynom $f \in K[t]$ mit $\deg(f) \leq n-1$ und mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 42

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von beliebiger (eventuell unendlicher) Dimension, sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

(a) Ist $f \circ f = f$, so ist $V = \mathrm{Eig}(f, 1) \oplus \mathrm{Eig}(f, 0)$.
(b) Ist $f \circ f = \mathrm{id}$, so ist $V = \mathrm{Eig}(f, 1) \oplus \mathrm{Eig}(f, -1)$.

Aufgabe 43

Sei $n \in \mathbb{N}$, sei R ein kommutativer Ring, und seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in R$. Zeige für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & & a_1 \\ & 1 & 0 & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 & a_{n-2} \\ & & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und für $t \in R$:

$$\det(tI_n - A) = t^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i.$$

Aufgabe 44

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 \in K[t]$ mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$, und sei $U = \{pq \colon q \in K[t]\}$. Zeige:

(a) U ist ein Untervektorraum von $K[t]$, und die Abbildung

$$\phi\colon\ K[t]/U \to K[t]/U, \quad g + U \mapsto tg + U \quad (g \in K[t])$$

ist ein wohldefinierter Endomorphismus des K-Vektorraums $K[t]/U$.
(b) $\left(1 + U,\, t + U,\, \dots,\, t^{n-1} + U\right)$ ist eine Basis des K-Vektorraums $K[t]/U$.
(c) Bestimme Rang, Determinante und Spur von ϕ.

Aufgabe J

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Die Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sei diagonalisierbar und habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ für $j = 2, \ldots, r$. Zeige: Für jeden Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ konvergiert die Folge $\lambda_1^{-k} A^k v$ $(k = 1, 2, \ldots)$ gegen einen Vektor $L(v) \in \mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$. Beschreibe auch die Abbildung $v \mapsto L(v)$.