Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
3. Februar 2017

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 12

Abgabe: Freitag, 10. Februar 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 45
Berechne die Potenzen A^n ($n \in \mathbb{Z}$) der invertierbaren Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$
in geschlossener Form. (Für $n \in \mathbb{N}$ ist dabei A^{-n} wie üblich definiert als $A^{-n} := (A^{-1})^n$.)

Aufgabe 46
Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Matrix
$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a+1 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

(a) Bestimme alle reellen Zahlen a derart, daß A_a diagonalisierbar ist.
(b) Finde für jeden in (a) gefundenen Wert von a eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ derart, daß $D := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist, und bestimme D.

Aufgabe 47
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[t]$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$, und sei $U = \{pq \colon q \in K[t]\}$. Betrachte den durch $\phi(g + U) = tg + U$ ($g \in K[t]$) definierten Endomorphismus ϕ von $K[t]/U$ (siehe Aufgabe 44).

(a) Bestimme das charakteristische Polynom von ϕ.
(b) Sei $p = t^3 - t$ und $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Bestimme alle Eigenwerte von ϕ sowie für jeden Eigenwert λ eine Basis von $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$, und entscheide, ob ϕ diagonalisierbar ist.
(c) Was ändert sich an der Antwort zu (b), wenn $\mathrm{char}(K) = 2$ ist?

Aufgabe 48
Sei $n \geq 2$. Seien Spaltenvektoren $0 \neq u, v \in K^n$ gegeben, und sei $A = uv^t$. Bestimme die Eigenwerte, das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A. In welchen Fällen ist A diagonalisierbar? (*Hinweise*: Berechne A^2. Was ist $\mathrm{rk}(A)$?)

Aufgabe K

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch $f_1 = f_2 = 1$ und durch die Rekursion $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$. Es gibt reelle Zahlen c, λ_1, λ_2 mit

$$f_n \;=\; c(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Finde diese Zahlen. (*Hinweis*: Finde eine reelle 2×2-Matrix A mit $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.)