Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
20. Februar 2017

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 13

Einige Aufgaben zur Jordanschen Normalform, Bearbeitung freiwillig (keine Korrektur). Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 49

Bestimme für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 14 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(K)$$

eine Jordansche Normalform J und eine Transformationsmatrix $S \in \mathrm{GL}_4(K)$ mit $S^{-1}AS = J$.

Aufgabe 50

"Sind A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $\chi_A = \chi_B$ und $q_A = q_B$, so ist $A \approx B$." Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist diese Aussage richtig? (Beweis bzw. Gegenbeispiel)

Aufgabe 51

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Jede Matrix in $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist ähnlich zu ihrer Transponierten.
(b) Gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $SAS^{-1} = A^t$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

Hinweis zu (b): Betrachte $A = A_1 A_2$.

Aufgabe 52

Es gibt auch eine multiplikative Jordan-Chevalley Zerlegung in der Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$. Eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ heißt *unipotent*, wenn $U - I_n$ nilpotent ist. Zeige: Ist $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, und zerfällt das charakteristische Polynom χ_A in Linearfaktoren, so gibt es Matrizen $D, U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit D diagonalisierbar, U unipotent und $A = DU = UD$.

Aufgabe 53

Seien A, $N \in \mathrm{M}_n(K)$. Es gelte $AN = NA$, und es sei N nilpotent. Dann haben A und $A + N$ dasselbe charakteristische Polynom. (*Hinweis*: Zeige zunächst $\det(A) = \det(A + N)$. Es darf verwendet werden, daß jeder Körper Teilkörper eines unendlichen Körpers ist.)

Aufgabe 54

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Sind zwei Matrizen A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ zueinander ähnlich über $\mathbb{C}$, so auch über $\mathbb{R}$. — *Anleitung*: Wähle $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $A = U^{-1}BU$. Schreibe $U = R + iS$ mit R, $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zeige, daß $U_a = R + aS$ für geeignetes $a \in \mathbb{R}$ invertierbar ist, und daß $A = U_a^{-1}BU_a$ für solches a gilt.