Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
4. November 2016

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 2

Abgabe: Freitag, 11. November 2016 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen neben F411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 5

Seien X, Y Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ für jede Teilmenge A von X gilt $A = f^{-1}(f(A))$.
(b) f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ für jede Teilmenge B von Y gilt $f(f^{-1}(B)) = B$.

Aufgabe 6

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Für jedes $x \in G$ gelte $x \cdot x = e$. Zeige, daß die Gruppe G abelsch ist.

Aufgabe 7

Im folgenden ist jeweils eine Gruppe G und eine Teilmenge $H \subseteq G$ gegeben. In welchen Fällen ist H eine Untergruppe von G?

(a) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \{m + n\sqrt{2} \colon m,\, n \in \mathbb{Z}\}$,
(b) $G = (S_n, \circ)$ mit $n \geq 3$, $H = \{\sigma \in S_n \colon \sigma(1) = 1 \vee \sigma(2) = 2\}$,
(c) $G = (S_6, \circ)$, $M = \{1, 2, 3\}$, $H = \{\sigma \in S_6 \colon \sigma(M) \subseteq M \vee \sigma(M) \cap M = \varnothing\}$.

Aufgabe 8

Sei $G = \{a, b, c, d, e\}$ eine Gruppe aus 5 Elementen (dabei braucht e nicht das neutrale Element zu sein). In der Verknüpfungstafel sind die meisten Einträge unleserlich, nur die folgenden können entziffert werden:

	a	b	c	d	e
a	b	d	.	.	.
b	.	.	.	.	.
c	.	.	.	.	.
d	.	.	.	.	.
e	.	.	e	.	.

Stelle die vollständige Tafel wieder her und beweise, daß dies in eindeutiger Weise möglich ist.

Aufgabe A*

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge, sei $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung. Zeige: f ist nicht surjektiv. (*Hinweis*: Betrachte die Menge $\{x \in X \colon x \notin f(x)\}$.)