Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
11. November 2016

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 3

Abgabe: Freitag, 18. November 2016 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen neben F411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 9

Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Für A, $B \in \mathcal{P}(X)$ sei

$$A + B \;:=\; (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B), \quad A \cdot B \;:=\; A \cap B.$$

Zeige, daß $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. Welches Element von $\mathcal{P}(X)$ ist die Null in diesem Ring, welches ist die Eins? Drücke $A \cup B$ und $A \smallsetminus B$ mit Hilfe von $+$ und $\cdot$ aus A und B aus.

Aufgabe 10

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Beweise:

(a) $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar;
(b) genau eine der beiden Zahlen n und $n^6 + 6$ ist durch 7 teilbar.

Aufgabe 11

Sei K ein Körper. Auf der Menge $F := K \times K$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \;:=\; (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2)$$

und

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \;:=\; (x_1x_2 - y_1y_2,\, x_1y_2 + x_2y_1)$$

$(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2 \in K)$.

(a) Zeige, daß F ein kommutativer Ring ist.
(b) Für $K = \mathbb{R}$ zeige, daß F ein Körper ist.
(c) Ist F ein Körper für $K = \mathbb{F}_2$? für $K = \mathbb{F}_3$?

Hinweis: Für die Existenz von multiplikativen Inversen betrachte Produkte der Form $(x, y) \cdot (x, -y)$.

Aufgabe 12

(Aus einem Bundeswettbewerb Mathematik) Kann man aus 100 beliebig gegebenen ganzen Zahlen stets 15 Zahlen so auswählen, daß die Differenz zweier beliebiger dieser 15 Zahlen durch 7 teilbar ist? (Beweis!)

Aufgabe B*

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Zeige: Jeder endliche nullteilerfreie kommutative Ring ist ein Körper.