Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
18. November 2016

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 4

Abgabe: Freitag, 25. November 2016 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen neben F411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Aufgabe 13

Betrachte die beiden Polynome $f = 3t^4 - t^3 + 2t - 6$ und $g = 2t^2 - 3$. Dividiere f durch g mit Rest in $K[t]$, d. h. finde Polynome $q, r \in K[t]$ mit $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$,

(a) für $K = \mathbb{Q}$,
(b) für $K = \mathbb{F}_p$ (p Primzahl).

Aufgabe 14

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

(a) Bestimme alle $v \in V$, für die die Menge $v + U := \{v + u \colon u \in U\}$ ein Untervektorraum von V ist (mit Begründung).
(b) Zeige: Ist $U \neq V$, so ist $\operatorname{span}(V \setminus U) = V$.

Aufgabe 15

Sei V ein Vektorraum, seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Beweise: Ist $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V, so folgt $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 16

Im folgenden ist eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben. Entscheide jeweils (mit Begründung!), ob $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(M) = \mathbb{R}^3$ ist:

(a) $M = \{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$;
(b) $M = \{(a, a^2, a^3) \colon a \in \mathbb{R}\}$;
(c) $M = \{(1,a,0),\ (a,0,1),\ (0,1,a)\}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

Aufgabe C*

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei K ein Körper. Für $f \in K[t]$ sei die Abbildung $\tilde{f} \colon K \to K$ definiert durch $\tilde{f} \colon x \mapsto f(x)$ ($x \in K$). Beweise: Die Abbildung $K[t] \to \operatorname{Abb}(K,K)$, $f \mapsto \tilde{f}$ ist genau dann injektiv, wenn $|K| = \infty$ ist.