Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
25. November 2016

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 5

Abgabe: Freitag, 2. Dezember 2016 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Aufgabe 17

Sei V ein K-Vektorraum und seien U_1, U_2, U_3 Unterräume von V.

(a) Ist $U_3 \subseteq U_1$, so gilt $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + U_3$.

(b) Zeige an einem Beispiel, daß ohne die Voraussetzung $U_3 \subseteq U_1$ im allgemeinen weder $U_1 \cap (U_2 + U_3) \subseteq (U_1 \cap U_2) + U_3$ noch $U_1 \cap (U_2 + U_3) \supseteq (U_1 \cap U_2) + U_3$ gilt.

Aufgabe 18

Für jede Menge $M \neq \varnothing$ ist die Menge $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f\colon M \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum via

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (af)(x) := af(x) \quad (x \in M)$$

(f, $g \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$), das braucht nicht bewiesen zu werden. Betrachte für $t \in \mathbb{R}$ das durch

$$f_t(x) := \begin{cases} 0 & x < t, \\ 1 & x \geq t \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

definierte Element $f_t \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Entscheide, ob die Familie $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 19

Entscheide für jede der folgenden Familien $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^4$, ob $\mathcal{F}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ ist. Falls dies der Fall ist, ergänze $\mathcal{F}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$:

(a) $\mathcal{F} = (v_1, v_2)$ mit $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (2,3,4,5)$;

(b) $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (2,3,4,5)$, $v_3 = (3,4,5,6)$;

(c) $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (2,3,4,1)$, $v_3 = (3,4,1,2)$.

Aufgabe 20

Sei K ein Körper. Wir betrachten die beiden folgenden Untervektorräume von K^3:

$$U := \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\Big\},$$
$$V := \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \colon x_1 = x_2 = x_3\Big\}.$$

Für jeden der Unterräume U, V, $U + V$, $U \cap V$ von K^3 bestimme man eine Basis. Hängen die Antworten vom Körper K ab?

Aufgabe D*

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, und seien $U_1, \ldots, U_r$ endlich viele Untervektorräume von V mit $U_i \neq V$. Zeige: Ist $r \leq |K|$, so ist $U_1 \cup \cdots \cup U_r \neq V$. Zeige weiter für $|K| < \infty$ und $2 \leq \dim_K(V) < \infty$, daß V als Vereinigungsmenge von $|K| + 1$ echten Unterräumen geschrieben werden kann.