Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
2. Dezember 2016

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 6

Abgabe: Freitag, 9. Dezember 2016 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 21

Sei $\mathbb{C} = \{a + bi \colon a,\, b \in \mathbb{R}\}$ der Körper der komplexen Zahlen, mit $i^2 = -1$. Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $a,\, b \in \mathbb{R}$ heißt $\overline{z} := a - bi$ die zu z konjugiert komplexe Zahl. Zeige:

(a) Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ ist ein Ringisomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.
(b) Für $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} \in \mathbb{R}$, und $z\overline{z} > 0$ für $z \neq 0$.
(c) Für $z \in \mathbb{C}$ setzt man $|z| := \sqrt{z\overline{z}}$ (nichtnegative Quadratwurzel). Die Abbildung $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*_+$, $z \mapsto |z|$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 22

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{1 \le k,l \le n} \in \mathrm{M}_n(K)$, wie in der Vorlesung. Beweise:

(a) Für $i \neq j$ ist die Matrix $I_n + E_{ij}$ invertierbar.
(b) Für $n \geq 2$ ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ nicht abelsch.

Aufgabe 23

Betrachte die Teilmengen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} :\ a,\, b \in K^*,\ c \in K \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :\ c \in K \right\}$$

von $\mathrm{M}_2(K)$.

(a) B und U sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(K)$.
(b) Die Gruppe U ist isomorph zur Gruppe $(K, +)$.
(c) Ist U ein Normalteiler von B? von $\mathrm{GL}_2(K)$? (Begründungen!)

Aufgabe 24

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$, und seien U_1, U_2 Unterräume von V mit $\dim(U_1) = \dim(U_2) = d$. Zeige, daß es zu U_1 und U_2 ein gemeinsames lineares Komplement in V gibt, also einen Unterraum W von V mit $V = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$. (*Hinweis:* Absteigende Induktion nach d.)

Aufgabe E*

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : a,\, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, wobei $\overline{z}$ die zu $z \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl bedeutet (Aufgabe 21). Zeige, daß $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ein nicht kommutativer Schiefkörper ist.