Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
9. Dezember 2016

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 7

Abgabe: Freitag, 16. Dezember 2016 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 25

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, und sei $f(1) = a + bi$ und $f(i) = c + di$ mit $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$. Genau dann ist die Abbildung f $\mathbb{C}$-linear, wenn $a - d = b + c = 0$ ist.

Aufgabe 26

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f \circ f = f$. Zeige: Dann gilt $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = V$. (*Hinweis*: Zeige zunächst $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\}$.)

Aufgabe 27

(a) Für die Untergruppe $T := \{z \in \mathbb{C}^*\colon z\overline{z} = 1\}$ von $\mathbb{C}^*$ zeige man $T \trianglelefteq \mathbb{C}^*$ und $\mathbb{C}^*/T \cong \mathbb{R}_+^*$ (mit $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\}$ wie in der Vorlesung).

(b) Für die Untergruppen

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a,\, b \in K,\ a \neq 0 \right\}, \quad U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in K \right\}$$

von $\mathrm{GL}_2(K)$ zeige man $U \trianglelefteq G$ und $G/U \cong K^*$.

Aufgabe 28

Sei $V = \mathbb{R}[t]$ und $U = \{f \in V\colon f(0) + 2f(1) = 3f(0) - 2f(2) = 0\}$. Zeige, daß U ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V ist, bestimme $\mathrm{codim}_V(U)$, und gib einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum W von V mit $U \oplus W = V$ an.

Aufgabe F

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei K ein Körper, sei $d \in K$ ein festes Element, und sei

$$R_d := \left\{ \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix} :\ a,\, b \in K \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(K).$$

(a) R_d ist ein kommutativer Teilring von $\mathrm{M}_2(K)$.

(b) Ist $x^2 \neq d$ für alle $x \in K$, so ist R_d ein Körper.

(c) Gib einen Körper mit genau 49 Elementen an.