Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
16. Dezember 2016

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 8

Abgabe: Freitag, 13. Januar 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 29

Sei V ein K-Vektorraum, sei U ein Untervektorraum von V, und sei $\mathcal{F} = (w_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in V, sowie $W = \operatorname{span}(\mathcal{F})$. Zeige:

(a) Die Familie $\overline{\mathcal{F}} := (w_i + U)_{i\in I}$ ist linear unabhängig in V/U $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist linear unabhängig in V und $U \cap W = \{0\}$;
(b) $\overline{\mathcal{F}}$ ist ein Erzeugendensystem von V/U $\Leftrightarrow$ $U + W = V$;
(c) $\overline{\mathcal{F}}$ ist eine Basis von V/U $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist linear unabhängig und $V = U \oplus W$.

Aufgabe 30

Seien $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen von endlicher Dimension. Zeige

$$\operatorname{rk}(g \circ f) \ \geq \ \operatorname{rk}(f) + \operatorname{rk}(g) - \dim(V).$$

Aufgabe 31

Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, sei $r \in \mathbb{N}$. Beweise: Genau dann ist $\operatorname{rk}(A) \leq r$, wenn es Matrizen $B \in \mathrm{M}_{m\times r}(K)$ und $C \in \mathrm{M}_{r\times n}(K)$ gibt mit $A = BC$.

Aufgabe 32

Seien $a, b \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Bestimme den Rang der $n \times n$-Matrix

$$aI_n + b\sum_{i\neq j} E_{ij} \ = \ \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von a und b. (*Tipp:* Subtrahiere die erste Zeile von den anderen Zeilen.)

Aufgabe G

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Finde einen Ring R und zwei Elemente $a, b \in R$ mit $ab = 1$ und $ba \neq 1$. (*Hinweis*: Nimm für R den Endomorphismenring eines geeigneten K-Vektorraums, z. B. $K[t]$.)

Aufgabe W

(Freiwillige Weihnachtsaufgabe) Sie sind der Weihnachtsmann und müssen Plätzchen backen. Das genaue Rezept haben Sie leider vergessen, Sie können sich aber noch an Folgendes erinnern:

> *$100x$ g Mehl, $100y$ g Butter, $100z$ g Zucker, w Eigelbe und z Vanillezucker werden zu Teig verknetet, kalt gestellt und nach einigen Stunden dünn ausgerollt. Dann werden Plätzchen ausgestochen, mit einem weiteren Eigelb bestrichen und für $x+y+z$ bis $x+y+w$ Minuten bei $100z$ Grad gebacken.*

Ihr Assistent Nikolaus gibt zu bedenken, daß unbedingt die folgenden Bedingungen eingehalten werden müssen, damit die Plätzchen auch schmecken:

$$\begin{aligned} w - x + y &= 2 \\ w - y + 3z &= 7 \\ 2x + 4y - z &= 20 \\ w - x + z &= 1 \end{aligned}$$

Backen Sie die Plätzchen nach diesem Rezept und machen Sie den Geschmackstest. Wenn der nicht überzeugend ausfällt, wählen Sie einen Abschnitt im Vorlesungsskript, arbeiten ihn durch und beginnen danach mit dem Backen von vorn. Beim nächsten Mal wählen Sie einen anderen Abschnitt. Wiederholen Sie den Zyklus so lange, bis Sie entweder köstliche Plätzchen gebacken haben oder das Skript auswendig aufsagen können. (Für die Rekonstruktion des Rezepts gibt es Extrapunkte wie üblich, die Abgabe der Übungsaufgabe in Naturalien ist bei Ihrem Tutor aber auch willkommen.)

Das Lineare Algebra Team wünscht allen

frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!