Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze, M. Thomas
13. Januar 2017

Übungen zu Lineare Algebra I (WS 2016/17)

Blatt 9

Abgabe: Freitag, 20. Januar 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Bei den Rechenaufgaben 33-36 sollen die einzelnen Rechenschritte jeweils klar dokumentiert werden.

Aufgabe 33

Bestimme alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & & & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 4 \end{array}$$

Aufgabe 34

Seien $U = \operatorname{span}(u_1, u_2)$, $V = \operatorname{span}(v_1, v_2)$ Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$, mit

$$u_1 = (1,1,1,2)^t, \quad u_2 = (2,1,0,3)^t, \quad v_1 = (1,-1,1,0)^t, \quad v_2 = (-1,2,1,1)^t.$$

Bestimme eine Basis von $U \cap V$.

Aufgabe 35

Betrachte den von den Vektoren

$$u_1 = (1,-1,3,2)^t,\ u_2 = (2,-1,0,1)^t,\ u_3 = (-3,1,3,0)^t,\ u_4 = (0,0,3,1)^t$$

aufgespannten Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$. Finde Teilmengen I, $J \subseteq \{1,2,3,4\}$ derart, daß $(u_i \colon i \in I)$ eine Basis von U und $U \oplus \operatorname{span}(e_j \colon j \in J) = \mathbb{R}^4$ ist. (Hier ist e_1, e_2, e_3, e_4 die kanonische Basis von $\mathbb{R}^4$.) Gib außerdem eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$ an (mit Begründung).

Aufgabe 36

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ finde man Matrizen $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $Q \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ derart, daß PAQ die Normalform $(*)$ des Rangsatzes hat (Vorlesung III.6.4 und III.6.5). (*Hinweis*: Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen.)

Aufgabe H

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $n \in \mathbb{N}$, sei K ein Körper. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $a \in K^*$ sei $D_i(a) := I_n + (a-1)E_{ii} = \mathrm{diag}(1, \dots, a, \dots, 1) \in \mathrm{GL}_n(K)$. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \neq i$ sei weiter $U_{ij} := I_n + E_{ij}$. Zeige: Jede Matrix in $\mathrm{GL}_n(K)$ ist Produkt von endlich vielen Matrizen der Form U_{ij} (mit $i \neq j$ in $\{1, \dots, n\}$) oder $D_i(a)$ (mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $a \in K^*$). (*Hinweis*: Elementare Zeilenumformungen)