Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
12. April 2016

Übungen zur Vorlesung Konvexität (SS 2016)

Blatt 1

Besprechung: Donnerstag, 28. April 2016

Sei V stets ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Aufgabe 1

Sei $\dim(V) < \infty$, und sei $K \subseteq V$ eine konvexe Menge. Zeige $K^i = \mathrm{int}(K)$ und $K^a = \overline{K}$. (Hier sind K^i das algebraisch Innere und K^a der algebraische Abschluß von K, wie in der Vorlesung definiert.)

Aufgabe 2

Ist $\dim(V) < \infty$ und K eine dichte konvexe Teilmenge von V, so ist $K = V$. Gib ein Beispiel eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V (mit $\dim(V) = \infty$) und einer von V verschiedenen konvexen Teilmenge K an mit $K^a = V$.

Aufgabe 3

V habe eine abzählbar unendliche lineare Basis $\{v_i \colon i \geq 1\}$. Sei K die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen $x = \sum_{i \geq 1} a_i v_i$ mit $x \neq 0$ derart, daß alle $a_i \geq 0$ sind und daß $\sum_{i \geq 1} a_i \geq \frac{1}{n(x)}$ ist, wobei $n(x)$ die Anzahl der von 0 verschiedenen a_i sei. Zeige:

(a) K ist konvex.

(b) $0 \notin K^a$, aber $0 \in (K^a)^a$.

Aufgabe 4

Sei $S := \{(x, y, 0) \colon x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, sei $e := (1, 0, 1)$, $e' := (1, 0, -1)$, und sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ die konvexe Hülle der Menge $S \cup \{e, e'\}$.

(a) Bestimme $\dim(K)$ und zeige, daß K kompakt ist.

(b) Bestimme die Menge $ex(K)$ der Extremalpunkte von K und zeige, daß $ex(K)$ nicht abgeschlossen ist.

(c) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Zeige, daß die Menge $ex(K)$ der Extremalpunkte von K abgeschlossen ist.