Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
12. April 2016

Übungen zur Vorlesung Konvexität (SS 2016)

Blatt 2

Besprechung: Donnerstag, 12. Mai 2016

Sei V stets ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$.

Aufgabe 5

Sei $K \subseteq V$ eine kompakte Teilmenge. Es gebe eine Linearform $\lambda \in V^\vee$ mit $\lambda > 0$ auf K. Dann ist der konvexe Kegel $\operatorname{cone}(K)$ abgeschlossen und spitz.

Aufgabe 6

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, sei $C_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

$$C_n \;:=\; \operatorname{cone}\bigl\{(1, t, t^2, \dots, t^n) \colon t \in \mathbb{R}\bigr\},$$

und sei $M_n := C_n + \mathbb{R}_+(0, \dots, 0, 1)$.

(a) M_n ist der Abschluß von C_n.

(b) M_n identifiziert sich mit dem dualen Kegel Σ_n^* des Kegels Σ_n aller Quadratsummen in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad $\le n$.

M_n heißt der n-te *Momentenkegel*.

Aufgabe 7

Sei $C \subseteq V$ ein abgeschlossener Kegel.

(a) $\operatorname{relint}(C^*) = \{\lambda \in C^* \colon \lambda > 0 \text{ auf } C \smallsetminus \operatorname{supp}(C)\}$.

(b) $\operatorname{supp}(C)$ ist eine exponierte Seite von C.

(c) Ist $\dim(\operatorname{span}(C)/\operatorname{supp}(C)) \ge 2$, so gibt es einen Vektor $0 \ne u \in \operatorname{span}(C)$ mit $C \cap \mathbb{R}u = \{0\}$.

Aufgabe 8

Seien $f_1, \dots, f_r$ lineare Polynome in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, und sei $P = \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon f_i(\xi) \ge 0$ für $i = 1, \dots, r\}$. Genau dann ist $P = \varnothing$, wenn es nichtnegative reelle Zahlen $c_1, \dots, c_r$ gibt mit $\sum_{i=1}^r c_i f_i = -1$.