Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
31. Mai 2016

Übungen zur Vorlesung Konvexität (SS 2016)

Blatt 4

Besprechung: Donnerstag, 16. Juni 2016

Aufgabe 13
Sei $A \in \mathsf{S}^d$, und sei $0 \le c \le d$ eine reelle Zahl. Bestimme

$$\min\Big\{\operatorname{tr}(AX)\colon X \in \mathsf{S}^d,\ \operatorname{tr}(X) = c,\ 0 \preceq X \preceq I\Big\}.$$

Aufgabe 14
Schreibe das Minimum aus Aufgabe 13 als ein semidefinites Programm in Standardform, und formuliere das duale semidefinite Programm.

Aufgabe 15
Sei $m \le n$ und $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, seien $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_m \ge 0$ die Eigenwerte von AA^t. Für $i = 1, \dots, m$ heißt $\sigma_i(A) := \sqrt{\lambda_i} \ge 0$ der i-te singuläre Wert von A. Für $k = 1, \dots, m$ setze $||A||_k := \sigma_1(A) + \cdots + \sigma_k(A)$.

(a) Die Eigenwerte von $\widetilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{S}^{m+n}$ sind $\pm\sqrt{\lambda_i}$ $(i = 1, \dots, m)$, sowie $(n-m)$-mal der Eigenwert 0.

(b) Für beliebige A, $B \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ gilt $||A + B||_k \le ||A||_k + ||B||_k$.

Aus (b) folgt, daß $||\cdot||_k$ eine Vektorraumnorm auf $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 16
Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ das Elliptop aller $x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & 1 & x_3 \\ x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

(a) Bestimme alle positiv-dimensionalen Seiten von E.

(b) Zeige, daß der algebraische Rand $\partial_a E$ eine rationale Fläche ist, und finde eine rationale Parametrisierung.