Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
28. Juni 2016

Übungen zur Vorlesung Konvexität (SS 2016)

Blatt 6

Besprechung: Donnerstag, 14. Juli 2016

Aufgabe 21
Sei $A = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ und $d \geq 1$, und sei $p \in A_d$ mit p^2 sos-extremal. Ist $n = 2$ oder $d \leq 3$, oder ist $n = 3$ und $d \leq 5$, so ist jeder irreduzible Faktor von p reell.

Aufgabe 22
Sei $A = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, sei $m \geq 1$ gerade und $P_m \subseteq A_m$ der Kegel der psd Formen vom Grad m. Sei $N = \dim(A_m)$, und sei

$$V_m \;=\; \bigl\{(\xi^\alpha)_{|\alpha|=m} \colon \xi \in \mathbb{R}^n\bigr\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^N$$

die affine reelle Veronesevarietät vom Grad m. Zeige: Der zu P_m duale Kegel P_m^* ist linear isomorph zum konvexen Kegel in $\mathbb{R}^N$, der von V_m erzeugt wird.

Aufgabe 23
Sei $A = \mathbb{R}[x, y, z]$. Betrachte die neun Punkte

$$M_1 = (1,1,1),\ M_2 = (1,-1,1),\ M_3 = (-1,1,1),\ M_4 = (-1,-1,1),$$
$$N_1 = (1,0,1),\ N_2 = (-1,0,1),\ N_3 = (0,1,1),\ N_4 = (0,-1,1)$$

und $O = (0,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$. Sei $\alpha \in A_6^\vee$ definiert durch

$$\alpha(f) \;=\; \sum_{i=1}^4 f(M_i) + 4\sum_{i=1}^4 f(N_i) - 2f(O).$$

(a) Zeige $\alpha \in \Sigma_6^*$ und bestimme den Kern der symmetrischen Bilinearform $b_\alpha \colon (p,q) \mapsto \alpha(pq)$ auf A_3.
(b) Zeige, daß die Robinsonform $f = (x^6 + y^6 + z^6) - (x^4y^2 + x^4z^2 + y^4x^2 + y^4z^2 + z^4x^2 + z^4y^2) + 3x^2y^2z^2$ psd ist.
(c) Berechne $\alpha(f)$ und folgere: f ist nicht sos.

Aufgabe 24
Entscheide für die folgenden binären Formen, ob sie Summen von Potenzen von Linearformen sind, und finde gegebenenfalls eine solche Darstellung.

(a) $f \;=\; x^4 + 12x^2y^2 + 4y^4$,
(b) $f \;=\; 66x^6 - 180x^5y + 300x^4y^2 + 300x^2y^4 + 180xy^5 + 65y^6$.