Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
12. April 2016

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie II (SS 2016)

Blatt 1

Abgabe: Dienstag, 19. April 2016 um 10.00 Uhr

Aufgabe 1
Seien n, $d \geq 1$ und $\mathtt{x} = (x_1, \dots, x_n)$, sei $\mathbb{R}[\mathtt{x}]_{2d}$ der Raum der Formen vom Grad $2d$, und sei $\Sigma_{n,2d} \subseteq \mathbb{R}[\mathtt{x}]_{2d}$ der Kegel der Quadratsummen von Formen vom Grad d. Zeige: Das Innere von $\Sigma_{n,2d}$ in $\mathbb{R}[\mathtt{x}]_{2d}$ ist nicht leer. (*Anleitung*: Zeige zunächst, daß jede Form in $\mathbb{R}[\mathtt{x}]_{2d}$ eine Differenz von zwei Formen in $\Sigma_{n,2d}$ ist.)

Aufgabe 2
Schreibe die quartische Form
$$f \;=\; x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2z^2 + y^2z^2$$
als Summe von drei Quadraten quadratischer Formen über $\mathbb{R}$. (*Hinweis*: f hat eine nichttriviale reelle Nullstelle.)

Aufgabe 3
Sei $\mathbb{R}[x]$ der Polynomring in einer Variable. Welche der folgenden quadratischen Moduln in $\mathbb{R}[x]$ sind Präordnungen?

(a) $M = QM(x)$;
(b) $M = QM(x, 1-x)$;
(c) $M = QM(x+1,\, x^2-x)$.

Aufgabe 4
Sei A ein Ring, sei S eine multiplikative Teilmenge und M ein quadratischer Modul von A, und sei
$$M_S \;=\; \left\{\frac{x}{s^2} \colon x \in M,\ s \in S\right\} \;\subseteq A_S.$$
Dann ist M_S der von M in A_S erzeugte quadratische Modul, und es gilt $\mathrm{supp}(M_S) = \mathrm{supp}(M)_S$ (das von $\mathrm{supp}(M)$ in A_S erzeugte Ideal). Insbesondere gilt $-1 \in M_S \Leftrightarrow S \cap \mathrm{supp}(M) \neq \varnothing$.