Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
19. April 2016

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie II (SS 2016)

Blatt 2

Abgabe: Freitag, 29. April 2016 um 10.00 Uhr

Aufgabe 5

Zeige die formale Identität $n!\,x = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\big((x+i)^n - i^n\big)$ für $n \ge 1$. (*Anleitung:* Für den Differenzoperator $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ und für $e \ge 0$ beweise man die Identität

$$\Delta^e f(x) \;=\; \sum_{i=0}^{e}(-1)^{e-i}\binom{e}{i} f(x+i)$$

und zeige: Ist f ein normiertes Polynom vom Grad n, so hat $\Delta^e f(x)$ für $0 \le e \le n$ den Grad $n-e$ und den Leitkoeffizient $e!\binom{n}{e}$.)

Aufgabe 6

Entwickle Polynome $0 \ne f \in \mathbb{R}[x,y]$ nach Potenzen von y, d.h. schreibe $f = \sum_{i\ge 0} f_i(x)\,y^i$ mit univariaten Polynomen $f_i \in \mathbb{R}[x]$. Sei $n = \deg_y(f)$ und $m = \deg_x(f_n)$, sei $a \in \mathbb{R}$ der Koeffizient von $x^m y^n$ in f. Sei $M \subseteq \mathbb{R}[x,y]$ die Menge aller Polynome $f \ne 0$ mit $(-1)^{mn}a > 0$, zusammen mit $f = 0$.

(a) M ist eine Semiordnung von $\mathbb{R}[x,y]$.

(b) M ist in keinem Positivkegel von $\mathbb{R}[x,y]$ enthalten.

Aufgabe 7

Sei $n \in \mathbb{N}$, betrachte Variablentupel $z = (z_1,\dots,z_n)$, $w = (w_1,\dots,w_n)$. Auf dem Polynomring $\mathbb{C}[z,w]$ betrachte den involutiven Automorphismus $f \mapsto f^*$ mit $z_j^* = w_j$ und $w_j^* = z_j$ ($j = 1,\dots,n$) und mit $c^* = \overline{c}$ (komplex Konjugierte) für $c \in \mathbb{C}$.

(a) Der Fixring von $*$ ist der Polynomring $A := \mathbb{R}[x,y]$ mit $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ und $x_j = \frac{1}{2}(z_j + w_j)$, $y_j = \frac{1}{2i}(z_j - w_j)$ ($j = 1,\dots,n$).

(b) Für $f \in \mathbb{C}[z,w]$ sei $|f|^2 := ff^*$. Die endlichen Summen $\sum_{j=1}^{r}|f_j(z,w)|^2$, mit $r \in \mathbb{N}$ und $f_j \in \mathbb{C}[z,w]$, sind genau die Quadratsummen in A.

(c) Sei $\Sigma_h A^2$ die Menge aller endlichen Summen $\sum_{j=1}^{r}|f_j(z)|^2$, mit $r \in \mathbb{N}$ und $f_j \in \mathbb{C}[z]$. Zeige, daß $\Sigma_h A^2$ ein erzeugender Semiring in A ist.

(d) Zeige $\Sigma_h A^2 \ne \Sigma A^2$.

Aufgabe 8

In den Bezeichnungen aus Aufgabe 7 sei $\Sigma_h := \Sigma_h A^2$, und sei I ein Ideal in $A = \mathbb{R}[x,y]$. Man zeige, daß der Semiring $\Sigma_h + I$ von A genau dann archimedisch ist, wenn I ein Element der Form

$$c + q + \sum_{j=1}^{n}|z_j|^2$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und $q \in \Sigma_h$ enthält.