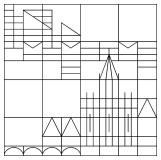
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
29. April 2016



Übungen zu Reelle algebraische Geometrie II (SS 2016)

Blatt 3

Abgabe: Freitag, 6. Mai 2016 um 10.00 Uhr

Aufgabe 9

Im Polynomring $\mathbb{R}[x]$ einer Variablen sei S der von $\mathbb{R}_+$ und x erzeugte Semiring, und sei $M = S + S(1-x)$.

(a) S ist ein erzeugender Semiring von $\mathbb{R}[x]$, und M ist ein archimedischer S-Modul.

(b) Für $0 < c < 1$ und $f = c + (1-x^2)^2$ gilt $f > 0$ auf X_M, aber $f \notin M$.

Für archimedische Moduln über erzeugenden Semiringen ist der archimedische Positivstellensatz also im allgemeinen falsch.

Aufgabe 10

Finde ein (inhomogenes) Polynom $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $f > 0$ auf $C = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \geq 0, \ldots, \xi_n \geq 0\}$ derart, daß $(1 + x_1 + \cdots + x_n)^N \cdot f$ für jedes $N \geq 0$ einen negativen Koeffizient hat.

Aufgabe 11

Sei c eine positive reelle Zahl, und sei

$$f(x,y) \;=\; (x+y)^2 + c(x-y)^2.$$

Zeige: Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade mit $n < c - 1$, so hat die Form $(x+y)^n \cdot f(x,y)$ einen negativen Koeffizienten.

Aufgabe 12

Wir verwenden die Bezeichnungen aus Aufgabe 7. Sei $z = (z_1, \ldots, z_n)$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)$, sei $f(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ mit $f = f^*$ und mit $f(u,\overline{u}) > 0$ für alle $u \in \mathbb{C}^n$ mit $|u| = 1$. Beweise Quillens Theorem: Es gibt endlich viele Polynome $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C}[z]$ mit

$$f(u,\overline{u}) \;=\; \sum_{j=1}^{r} |p_j(u)|^2$$

für alle $u \in \mathbb{C}^n$ mit $|u| = 1$.