Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
13. Mai 2016

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie II (SS 2016)

Blatt 5

Abgabe: Freitag, 20. Mai 2016 um 10.00 Uhr

Aufgabe 17

Sei A eine endlich erzeugte $\mathbb{R}$-Algebra. Beweise mit Hilfe des Satzes von Schmüdgen die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Der topologische Raum $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{R})$ ist kompakt;

(ii) für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen surjektiven Homomorphismus

$$\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1) \to A$$

der $\mathbb{R}$-Algebren.

Aufgabe 18

Sei A ein Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A, sei $\varphi\colon A \to A_\mathfrak{m}$ die Lokalisierungsabbildung.

(a) $I \mapsto IA_\mathfrak{m}$ ist eine Bijektion zwischen den $\mathfrak{m}$-primären Idealen I von A und den $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$-primären Idealen J von $A_\mathfrak{m}$.

(b) Ist $I \neq (1)$ ein Ideal von A und $\mathfrak{m}^N \subseteq I$ für ein $N \geq 0$, so ist I $\mathfrak{m}$-primär. Die Umkehrung ist richtig, falls A noethersch ist.

(c) Sei I ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal von A. Dann gibt es einen kanonischen Ringisomorphismus $A/I \cong A_\mathfrak{m}/IA_\mathfrak{m}$.

Aufgabe 19

Sei k ein Körper. Benutze Hilberts Nullstellensatz, um für jede endlich erzeugte k-Algebra A zu zeigen: $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Nil}(A)$.

Aufgabe 20

Beweise das *Schlangenlemma*: Ist

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Moduln mit exakten Zeilen, so gibt es einen natürlichen Homomorphismus $\delta\colon \ker(f'') \to \mathrm{coker}(f')$, so daß die Sequenz

$$0 \to \ker(f') \to \ker(f) \to \ker(f'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}(f') \to \mathrm{coker}(f) \to \mathrm{coker}(f'') \to 0$$

exakt ist.