Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
20. Mai 2016

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie II (SS 2016)

Blatt 6

Abgabe: Freitag, 27. Mai 2016 um 10.00 Uhr

Aufgabe 21
Sei A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $I \neq (1)$ ein Ideal von A. Sei $N = \bigcap_{n \geq 0} I^n M$.

(a) Es gibt $a \in I$ mit $(1+a)N = \{0\}$.
(b) Ist A ein lokaler oder ein integrer Ring, so ist $\bigcap_{n \geq 0} I^n = \{0\}$.

Hinweis zu (a): Verwende das Lemma von Artin-Rees, um $IN = N$ zu zeigen.

Aufgabe 22
Sei A ein Ring, seien $I_1, \ldots, I_r$ Ideale von A mit $I_i + I_j = (1)$ für alle $i \neq j$, und sei $I = \bigcap_i I_i$. Sei B die I-adische und B_i die I_i-adische Komplettierung von A, für $i = 1, \ldots, r$. Dann besteht ein kanonischer Ringisomorphismus $B \cong B_1 \times \cdots \times B_r$.

Aufgabe 23
Sei A ein nullteilerfreier Ring und t ein Primelement in A. Dann ist auch die (t)-adische Komplettierung $B := \varprojlim A/(t^n)$ von A nullteilerfrei.

Aufgabe 24
Sei A ein lokaler noetherscher Ring, sei $\widehat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$ seine Komplettierung und $G = \mathrm{Gr}(A) = \bigoplus_n \mathrm{Gr}_n(A)$ mit $\mathrm{Gr}_n(A) = \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ ($n \geq 0$) der zugehörige graduierte Ring. Zeige die Implikationen

$$G \text{ nullteilerfrei} \quad \Rightarrow \quad \widehat{A} \text{ nullteilerfrei} \quad \Rightarrow \quad A \text{ nullteilerfrei},$$

und beweise auch dieselben Implikationen mit “reduziert” statt “nullteilerfrei”.