Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, Ch. Schulze
27. Mai 2016

Übungen zu Reelle algebraische Geometrie II (SS 2016)

Blatt 7

Abgabe: Freitag, 3. Juni 2016 um 10.00 Uhr

Aufgabe 21

Sei A ein diskreter Bewertungsring, sei $K = \operatorname{Quot}(A)$, und sei v die zu A gehörende diskrete Bewertung von K.

(a) Sei $g = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \in A[\![t]\!]$ mit $a_0 \neq 0$, und sei $g^{-1} = \sum_{n\geq 0} b_n t^n$ in $K[\![t]\!]$. Dann gilt $v(b_n) \geq -(n+1)v(a_0)$ für alle $n \geq 0$.

(b) Ist $f = \sum_{n\geq n_0} c_n t^n \in K(\!(t)\!)$ mit $c_n \in K$, und ist $\liminf_{n\to\infty} \frac{v(c_n)}{n} = -\infty$, so liegt f nicht in $\operatorname{Quot} A[\![t]\!]$.

(c) (k ein Körper) Gib ein Element in $k(\!(x_1)\!)(\!(x_2)\!)$ an, das nicht in $k(\!(x_1, x_2)\!)$ liegt.

Aufgabe 22

Sei k ein Körper, sei $(A, \mathfrak{m})$ der lokale Ring der Kurve $y^2 = x^3$ (über k) im Ursprung, sei $\widehat{A}$ die Komplettierung von A und $G = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ der zu A assoziierte graduierte Ring. Untersuche die Ringe $\widehat{A}$ und G darauf, ob sie nullteilerfrei oder reduziert sind.

Aufgabe 23

Wie Aufgabe 22, aber für den lokalen Ring A der Kurve $y^2 = x^2 + x^3$ im Ursprung.

Aufgabe 24

Sei A ein noetherscher Ring und I ein Ideal von A, und der Ring A sei I-adisch vollständig. Dann hat jeder Punkt α in $\operatorname{Sper}(A)$ eine Spezialisierung β mit $I \subseteq \operatorname{supp}(\beta)$.