Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
28. April 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 1

Abgabe: Freitag, 5. Mai 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Sei K stets ein Körper. Alle Vektorräume sind K-Vektorräume.

Aufgabe 1

Betrachte $(\mathbb{N}, \mid\ )$, die durch die Teilbarkeitsrelation $a \mid b \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{N}\ b = ac$ partiell geordnete Menge der natürlichen Zahlen. Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine der folgenden Mengen:

(a) $A = \mathbb{N}$,
(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
(c) $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$,
(d) $A = \{2^k : 3 \leq k \leq 6\}$,
(e) $A = \{kn : k \in \mathbb{N}\}$, für gegebenes $n \in \mathbb{N}$,
(f) $A =$ Menge aller Primzahlen.

Bestimme jeweils alle oberen und unteren Schranken von A in $\mathbb{N}$, sowie alle maximalen und minimalen Elemente von A. Entscheide weiter, ob A ein größtes bzw. kleinstes Element hat, und gib diese ggfs. an.

Aufgabe 2

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Zeige:

(a) f injektiv $\Leftrightarrow$ es gibt eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$.
(b) f surjektiv $\Leftrightarrow$ es gibt eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

Aufgabe 3

Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ heißen zueinander kongruent, i. Z. $A \simeq B$, falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit $B = S^t A S$. Zeige:

(a) $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{M}_n(K)$.
(b) Aus $A \simeq B$ folgt $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.
(c) Gib für jede der beiden folgenden Aussagen entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

$$\forall\, A, B \in \mathrm{M}_n(K) \quad (A \approx B \ \Rightarrow\ A \simeq B);$$
$$\forall\, A, B \in \mathrm{M}_n(K) \quad (A \simeq B \ \Rightarrow\ A \approx B).$$

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = \infty$. Beweise, daß die kanonische lineare Abbildung $e : V \to V^{**}$ (Vorlesung VI.2.10) nicht surjektiv ist. (*Hinweis*: Verwende eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V und die dazu duale Familie $(v_i^*)_{i \in I}$ in V^*.)

b.w.

Aufgabe A*

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Seien M, N beliebige Mengen. Verwende das Zornsche Lemma, um zu zeigen, daß es eine injektive Abbildung $M \to N$ oder eine injektive Abbildung $N \to M$ gibt.