Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
30. Juni 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 10

Abgabe: Freitag, 7. Juli 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Aufgabe 37

Bestimme bei gegebenen a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{Z}$ alle ganzen Zahlen x, welche die simultanen Kongruenzen

$$x \equiv a_1 \pmod 7, \quad x \equiv a_2 \pmod 9, \quad x \equiv a_3 \pmod{20}$$

lösen.

Aufgabe 38

Sei K ein Körper. Betrachte die Polynome

$$f_1 \;=\; t^4 + t^3 - t^2 - 1, \quad f_2 \;=\; t^3 - 2t + 1, \quad f_3 \;=\; t^3 + t - 1$$

in $K[t]$.

(a) Bestimme alle Polynome $f \in K[t]$, für die es p_1, $p_2 \in K[t]$ gibt mit $f = p_1 f_1 + p_2 f_2$.

(b) Finde entweder Polynome p_1, p_2, $p_3 \in K[t]$ mit $p_1 f_1 + p_2 f_2 + p_3 f_3 = 1$, oder zeige, daß es solche nicht gibt.

Aufgabe 39

Gegeben sei die Matrix

$$T \;:=\; \begin{pmatrix} 12 & -4 & -10 \\ 0 & 12 & -12 \\ -8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Bestimme die Elementarteiler von T und finde Matrizen U, $V \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ derart, daß UTV Smith Normalform hat.

Aufgabe 40

Sei A ein Hauptidealring, seien $u_1, \dots, u_n \in A$ mit $\mathrm{ggT}(u_1, \dots, u_n) \sim 1$. Zeige: Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(A)$, die $(u_1, \dots, u_n)^t$ als erste Spalte hat. (*Hinweis*: Bringe $(u_1, \dots, u_n)^t$ in Smith Normalform.)

Aufgabe L

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, und seien a, b, $d \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = d$. Zeige

$$\mathrm{ggT}(q^a - 1,\, q^b - 1) \;=\; q^d - 1.$$