Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, S. Burgdorf
7. Juli 2017

Übungen zu Lineare Algebra II (SS 2017)

Blatt 11

Abgabe: Freitag, 14. Juli 2017 bis 10.00 Uhr in die Briefkästen auf F4. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt. Alle Behauptungen sind zu begründen!

Aufgabe 41

Sei $A = \mathbb{Z}[i]$ (mit $i^2 = -1$) der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Der Ring A ist euklidisch, siehe Aufgabe K. Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$\text{(a)}\ \ T = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 3-i & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\ \ T = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3+i & i-1 \end{pmatrix}$$

über A. Bestimme die Elementarteiler von T und finde Matrizen $U, V \in \mathrm{GL}_2(A)$ derart, daß die Matrix UTV Smith Normalform hat.

Aufgabe 42

Bestimme alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 &= 2 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Aufgabe 43

Sei A ein Hauptidealring, sei $a \in A$. Bestimme die Elementarteiler

(a) der Jordanmatrix $J_n(a) = aI_n + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} \in \mathrm{M}_n(A)$ (für $n \in \mathbb{N}$),

(b) der 3×3-Matrix $\mathrm{diag}(ab, ac, bc)$, für a, b, $c \in A \setminus \{0\}$ paarweise teilerfremd.

Aufgabe 44

Sei $n \in \mathbb{N}$, sei A ein kommutativer Ring, sei $T \in \mathrm{M}_n(A)$, und seien $u_1, \dots, u_n \in A^n$ die Spalten von T. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) T ist invertierbar,

(ii) $u_1, \dots, u_n$ bilden eine Basis von A^n,

(iii) $u_1, \dots, u_n$ bilden ein Erzeugendensystem von A^n.

Aufgabe M

(Freiwillige Zusatzaufgabe) Sei A ein kommutativer Ring. Für (rechteckige) Matrizen M, N über A bezeichne $M \oplus N$ die Blockmatrix $\left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{smallmatrix}\right)$. Zeige für die Minorenideale: Für alle $k \geq 0$ gilt

$$I_k(M \oplus N) = \sum_{i=0}^{k} I_i(M) I_{k-i}(N).$$